با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت




# ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

**فایل مورد نیاز + ایران توشه**

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه




irantooshe.ir

t.me/irantooshe

# گام به گام حسابان (۲) دوازدهم
# فصل سوم

عنوان فصل: حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

**از صفحه‌ی ۴۵ تا صفحه‌ی ۶۹ کتاب**

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت آمده است.

مباحث فصل: حدهای نامتناهی؛ حد در بی‌نهایت

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

# فهرست پرسش‌ها


۱ صفحه ۴۶ · فعالیت — رفتار تابع $x/1$ در همسایگی راست صفر ..... ۶

۲ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — رفتار تابع $x/1$ در همسایگی چپ صفر ..... ۶

۳ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — حدهای یک‌طرفه‌ی نامتناهی از روی نمودار ..... ۷

۴ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — کاربرد قضیه‌ی ۱ و نمودارها ..... ۸

۵ صفحه ۵۳ · کار در کلاس — محاسبه‌ی حدهای نامتناهی (قضیه‌ی ۳) ..... ۸

۶ صفحه ۵۴ · فعالیت — حد مجموع و حاصل‌ضرب با حد نامتناهی ..... ۹

۷ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — بازنویسی قضیه‌ی ۵ برای حد $-\infty$ ..... ۱۰

۸ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — محاسبه‌ی حد و تعیین قضیه‌ی به‌کاررفته ..... ۱۰

۹ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — رفتار $x^2/1$ و $x/1$ در اطراف صفر (مجانب قائم) ..... ۱۱

۱۰ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — مجانب‌های قائم تابع گویا ..... ۱۱

۱۱ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱ ـ درستی حدهای نامتناهی ..... ۱۲

۱۲ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۲ ـ محاسبه‌ی حدهای نامتناهی ..... ۱۲

۱۳ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۳ ـ تابعی با دو مجانب قائم ..... ۱۳

۱۴ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۴ ـ تابعی روی $[-2, 2] - \{1\}$ با مجانب قائم ..... ۱۴


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۵ ـ مجانب‌های قائم ..... ۱۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۶ ـ نمودار $x/1|x|$ در کنار مجانب قائم ۱۵

۱۷ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۷ ـ تشخیص نمودار در همسایگی $x = 1$ ۱۵

۱۸ صفحه ۵۹ · فعالیت — رفتار $x/1$ وقتی $x$ به $+\infty$ میل می‌کند ۱۶

۱۹ صفحه ۶۰ · کار در کلاس — رفتار $x/1$ وقتی $x$ به $-\infty$ میل می‌کند ۱۷

۲۰ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — حد در $\pm\infty$ از روی نمودار ۱۷

۲۱ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — مفهوم حد نامتناهی در $-\infty$ و نمودار $x$ و $x^2$ ۱۸

۲۲ صفحه ۶۴ · فعالیت — رفتار تابع $x^3$ در $\pm\infty$ ۱۸

۲۳ صفحه ۶۶ · کار در کلاس — حد تابع گویا در $\pm\infty$ ۱۹

۲۴ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — چرا $y = 1$ مجانب افقی است؟ ۲۰

۲۵ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — ۱ ـ تشخیص مجانب افقی $y = 2$ از روی نمودار ۲۰

۲۶ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — ۲ ـ مجانب‌های افقی و قائم ۲۰

۲۷ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۱ ـ مفهوم حد در بی‌نهایت ۲۱

۲۸ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۲ ـ حدها و مجانب‌ها از روی نمودار ۲۱

۲۹ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۳ ـ محاسبه‌ی حد در بی‌نهایت ۲۲

۳۰ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۴ ـ مجانب‌های افقی و قائم ۲۲

۳۱ صفحه ۶۹ · تمرین — تمرین ۵ ـ رسم نمودار با شرایط داده‌شده ۲۳


ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۴۶ **فعالیت**

**در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در این فعالیت رفتار تابع گویای $f(x)=\frac{1}{x}$ را در همسایگی راست $x=0$ بررسی می‌کنیم.**

**۱) جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می‌دهد. آن را تکمیل کنید. ($x=$ 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ..., 0)**

**۲) اگر بخواهیم f(x) از یک میلیون بزرگ‌تر شود، مقدار x از چه عددی باید کوچک‌تر شود؟**

**۳) وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می‌شوند؟ چرا؟**

**۱)** مقدار $f(x)=\frac{1}{x}$ را در هر نقطه حساب می‌کنیم:

| x | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | ... | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) = 1/x | 10 | 100 | 1000 | 10000 | ... | تعریف‌نشده |

**۲)** باید $\frac{1}{x}>10^6$ باشد. چون x مثبت است، با معکوس‌کردن دو طرف نتیجه می‌شود:

$$0<x<\frac{1}{10^6}=10^{-6}$$

یعنی x باید از $10^{-6}=0.000001$ کوچک‌تر (و مثبت) باشد.

**۳)** خیر. وقتی x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) (۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ...) بدون هیچ محدودیتی بزرگ می‌شوند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند؛ زیرا برای هر عدد مثبت دلخواه M اگر $0<x<\frac{1}{M}$ باشد، آنگاه $f(x)>M$ است. در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

(نماد $+\infty$ نشان می‌دهد که حد متناهی وجود ندارد؛ $+\infty$ عدد نیست و فقط بیان می‌کند که مقدار تابع از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ صفحه ۴۷ **کار در کلاس**

**برای تابع $f(x)=\frac{1}{x}$**

**الف) جدول زیر را کامل کنید: ($x=$ 0, ..., −0.00001, −0.0001, −0.001, −0.01, −0.1, −1)**

**ب) اگر بخواهیم مقدار f(x) از $-10^6$ کوچک‌تر شود، x باید چگونه انتخاب شود؟**

**پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، f(x) چه تغییری می‌کند؟**

**ت) در مورد $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ چه می‌توان گفت؟**

**الف)**

| x | -1 | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | -0.00001 | ... | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) = 1/x | -1 | -10 | -100 | -1000 | -10000 | -100000 | ... | تعریف‌نشده |

**ب)** باید $\frac{1}{x} < -10^6$ باشد. چون x منفی است، با معکوس‌کردن دو طرف (و برگرداندن جهت نامساوی) داریم:

$$-10^{-6} < x < 0$$

یعنی x باید از 0.000001- بزرگ‌تر (و منفی) باشد؛ یعنی به‌اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک شود.

**پ)** وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) منفی هستند و بدون هیچ محدودیتی کوچک می‌شوند (از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر می‌شوند).

**ت)** مقدار تابع از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود، پس حد متناهی ندارد و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

(چون حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$ است، حد دوطرفه‌ی 1/x در x = 0 وجود ندارد.)

۳ صفحه ۵۰ کار در کلاس

**نمودار توابع f, g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند. با توجه به آن‌ها حدود خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.**

**$f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \log x$ و $h(x) = \tan x$**

**$\lim_{x\to 2^-} f(x)$ وقتی $x\to 2^-$ ، $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ وقتی $x\to 2^+$ ، $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ وقتی $x\to 0^+$**

**$\lim_{x\to (-\pi/2)^+} h(x)$ وقتی $x\to (-\pi/2)^+$ ، $\lim_{x\to (\pi/2)^-} h(x)$ وقتی $x\to (\pi/2)^-$ ، $\lim_{x\to (\pi/2)^+} h(x)$ وقتی $x\to (\pi/2)^+$**

با توجه به نمودارها (تابع f در همسایگی x = 2 مانند $\frac{1}{x-2}$ ، تابع g لگاریتمی با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و $h = \tan x$):

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ : وقتی x از چپ به ۲ نزدیک می‌شود، نمودار به سمت پایین می‌رود.
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ : وقتی x از راست به ۲ نزدیک می‌شود، نمودار به سمت بالا می‌رود.
- $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ : نمودار لگاریتم در نزدیکی محور y به سمت پایین می‌رود.
- $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} h(x) = -\infty$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(برای $\tan x$: درست بعد از $x = -\pi/2$ مقدار تابع بسیار منفی است، درست قبل از $\pi/2$ بسیار مثبت و درست بعد از $\pi/2$ دوباره بسیار منفی.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۴ صفحه ۵۱ کار در کلاس

**با استفاده از نمودار توابع داده‌شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید.**

**الف)** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ **ب)** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

**الف)** برای $g(x) = \frac{1}{x}$ طبق قضیه‌ی ۱ ($n = 1$ فرد):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

چون حدهای چپ و راست برابر نیستند، حد دوطرفه‌ی $1/x$ در $x = 0$ وجود ندارد (نه عدد است و نه $\infty$ یا $-\infty$)؛ نمودار در سمت راست به سمت بالا و در سمت چپ به سمت پایین می‌رود.

**ب)** برای $f(x) = \frac{1}{x^2}$ طبق قضیه‌ی ۱ ($n = 2$ زوج) حد راست و حد چپ هر دو برابر $+\infty$ است. پس:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

نمودار $1/x^2$ در دو طرف محور $y$ به سمت بالا می‌رود.

۵ صفحه ۵۳ کار در کلاس

**حدهای زیر را محاسبه کنید.**

**الف)** $\lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{(x+1)^2}$

**ب)** $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$

**پ)** $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x^2-2x+1}$

از قضیه‌ی ۳ استفاده می‌کنیم: اگر حد صورت عددی ناصفر باشد و مخرج به صفر میل کند، علامت حد صورت و علامت مخرج در همسایگی محذوف تعیین‌کننده‌ی $\pm\infty$ است.

**الف)** وقتی $x \to -1^+$: حد صورت $-3 = -2-1$ (منفی) و مخرج $(x+1)^2$ همواره مثبت و میل‌کننده به صفر است. طبق بند (ب) قضیه‌ی ۳:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{(x+1)^2} = -\infty$$

**ب)** وقتی $x \to 2^-$ (مثلاً $x = 1.9$ داریم $[x] = 1$,) پس صورت برابر $1 = -2-1$ است. مخرج $x-2$ منفی است و به صفر میل می‌کند. طبق بند (ت) قضیه‌ی ۳ ($L < 0$ و $g > 0$):

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x-2}=+\infty$$

**پ)** مخرج را تجزیه می‌کنیم: $x^2-2x+1=(x-1)^2$ که مثبت است و در $x\to 1^+$ به صفر میل می‌کند؛ حد صورت $-1=2-1$ منفی است. طبق بند (ب) قضیه‌ی ۳:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{(x-1)^2}=-\infty$$

(متن صورت‌های این پرسش در منبع ناقص بود و عبارت‌ها با روش درس بازسازی شده‌اند.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۶ صفحه ۵۴ فعالیت

**توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیرید.**

**۱) الف) حاصل $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to 0}g(x)$ را به دست آورید.**

**ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x\to 0}(f+g)(x)$ را محاسبه کنید.**

**پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

**۲) تابع $f\cdot g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x\to 0}f(x)$ و $\lim_{x\to 0}g(x)$ بیان کنید.**

---

**۱ـ الف)** طبق قضیه‌ی ۱ ($n=2$ زوج) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ و چون $g$ چندجمله‌ای است:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=0+1=1$$

**ب)** جمع دو تابع را هم‌مخرج می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=\frac{1}{x^2}+x+1=\frac{1+x^3+x^2}{x^2}$$

وقتی $x\to 0$، حد صورت برابر ۱ (مثبت) و مخرج $x^2$ مثبت و میل‌کننده به صفر است؛ پس طبق قضیه‌ی ۳:

$$\lim_{x\to 0}(f+g)(x)=+\infty$$

**پ)** اگر حد یک تابع $+\infty$ و حد تابع دیگر عددی حقیقی (مانند ۱) باشد، حد مجموع آن‌ها برابر $+\infty$ است.

**۲)** حاصل‌ضرب:

$$(f\cdot g)(x)=\frac{x+1}{x^2}$$

حد صورت برابر ۱ (مثبت) و مخرج مثبت و میل‌کننده به صفر است، پس:

$$\lim_{x\to 0}(f\cdot g)(x)=+\infty$$

irantooshe.ir

ارتباط: چون $\lim f = +\infty$ و $\lim g = 1 > 0$، حد حاصل‌ضرب برابر $+\infty$ شد؛ یعنی حاصل‌ضرب تابعی با حد $+\infty$ در تابعی با حد مثبت، حدش $+\infty$ است (و اگر حد تابع دوم عددی منفی بود حاصل‌ضرب به $-\infty$ میل می‌کرد).

**۷** صفحه ۵۵ — کار در کلاس

**۱) قضیه‌ی ۵ را در حالتی که $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.**

فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L$ ($L$ عددی حقیقی و ناصفر) باشد. آنگاه:

1. حد مجموع: $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = -\infty$
2. اگر $L > 0$ باشد: $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$
3. اگر $L < 0$ باشد: $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

(قضیه برای $x \to a^+$ و $x \to a^-$ نیز برقرار است.)

**۸** صفحه ۵۵ — کار در کلاس

**۲) حاصل حدود زیر را به دست آورید. در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.**

**الف)** $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1}$

**ب)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+1}{x^2}$

**پ)** $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x+2}{x^2+4x+4}$

**ت)** $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 2}{x^2}$

**الف)** حد صورت: $1+1=2>0$؛ مخرج $x-1$ برای $x<1$ منفی است و به صفر میل می‌کند. طبق قضیه‌ی ۳ (بند پ):

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

**ب)** عبارت را به صورت حاصل‌ضرب می‌نویسیم: $\frac{x^2+x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot(x^2+x+1)$. طبق قضیه‌ی ۱ داریم $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} (x^2+x+1) = 1 > 0$. پس طبق قضیه‌ی ۵ (بند ب):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+1}{x^2} = +\infty$$

**پ)** مخرج $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ همواره مثبت است و وقتی $x \to -2$ به صفر میل می‌کند؛ حد صورت $4-2+2 = 4 > 0$. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x+2}{x^2+4x+4} = +\infty$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

**ت)** وقتی $x \to 0^-$: حد صورت $\cos 0 - 2 = -1 < 0$ و مخرج $x^2$ مثبت و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند ب):

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 2}{x^2} = -\infty$$

(برخی ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و با روش درس بازسازی شده‌اند.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۹ صفحه ۵۵ کار در کلاس

**به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ در اطراف نقطه‌ی صفر توجه کنید.**

در هر دو نمودار، با نزدیک‌شدن x به صفر، نمودار به محور y «می‌چسبد» و بالا یا پایین می‌رود:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

در هر دو منحنی خط $x = 0$ (محور y) را مجانب قائم نمودار می‌نامیم؛ زیرا دست‌کم یکی از حدهای یک‌طرفه‌ی تابع در $x = 0$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.

۱۰ صفحه ۵۷ کار در کلاس

**مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ را در صورت وجود به دست آورید.**

مخرج و صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

مخرج در $x = 1$ و $x = 2$ صفر می‌شود و صورت در این نقطه‌ها صفر نیست (به ترتیب $-6$ و $-4$)؛ پس این دو خط مجانب قائم‌اند. بررسی حدها:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{-6}{0^-} = +\infty,$$

(در $x \to 1^+$ مخرج $(x-2)(x-1)$ منفی و در $x \to 2^+$ مثبت است.) بنابراین مجانب‌های قائم تابع، خطوط $x = 1$ و $x = 2$ هستند.

(ضابطه‌ی تابع در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱ صفحه ۵۸ تمرین

**۱) با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی، درستی حدهای زیر را نشان دهید.**

**الف)** $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2} = +\infty$

**ب)** $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$

**پ)** $\lim_{x\to -3^-} \frac{x-2}{x+3} = +\infty$

**الف)** وقتی $x \to 0$ حد صورت $0+2 = 2$ عددی مثبت است و مخرج $x^2$ همواره مثبت و میل‌کننده به صفر است.

طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2} = +\infty$$

**ب)** مخرج $(x-4)^2$ مثبت است و وقتی $x \to 4$ به صفر میل می‌کند و حد صورت ۱ (مثبت) است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$$

**پ)** وقتی $x \to -3^-$: حد صورت $-3-2 = -5$ (منفی) و مخرج $x+3$ منفی (چون $x < -3$) و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند ت: $L < 0$ و $g < 0$):

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-2}{x+3} = +\infty$$

(ضابطه‌ی برخی بندها در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۵۸ تمرین

**۲) حدهای زیر را محاسبه کنید.**

**الف)** $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2}$

**ب)** $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}$

**پ)** $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-1}{x^2-9}$

**الف)** وقتی $x \to 2^-$: حد صورت $2^2 = 4 > 0$ و مخرج $x-2$ منفی و میل‌کننده به صفر است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند پ):

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$$

**ب)** حالت 0/0 است؛ صورت و مخرج را تجزیه و ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x+3}{x-1}\quad (x\neq 1)$$

وقتی $x\to 1^-$: حد صورت ۴ (مثبت) و مخرج $x-1$ منفی و میل‌کننده به صفر است. پس:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x-1}=-\infty$$

**پ)** مخرج را تجزیه می‌کنیم: $\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x-1}{(x-3)(x+3)}$. وقتی $x\to 3^+$ مخرج مثبت و میل‌کننده به صفر است و حد صورت $3-1=2>0$ است. پس:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x^2-9}=+\infty$$

(برخی ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۱۳ صفحه ۵۸ تمرین

**۳) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $R-\{-1,1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.**

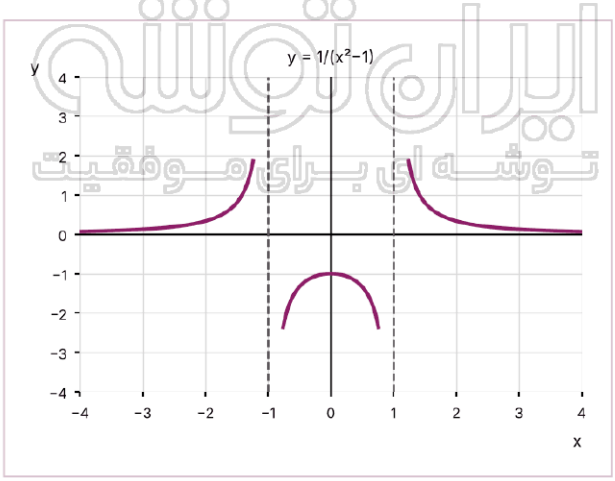
تابعی که در $x=\pm 1$ تعریف نشده و مخرجش در این نقطه‌ها صفر می‌شود، مثلاً:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

دامنه‌ی این تابع $R-\{-1,1\}$ است. حدها در نزدیکی نقطه‌های $\pm 1$:

$$\lim_{x\to 1^+}f=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}f=-\infty,\quad \lim_{x\to -1^+}f=-\infty,\quad \lim_{x\to -1^-}f=+\infty$$

پس خطوط $x=1$ و $x=-1$ مجانب قائم‌اند. نمودار:




(پاسخ یکتا نیست؛ هر نمودار با دامنه‌ی $R-\{-1,1\}$ و دو مجانب قائم پذیرفته است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

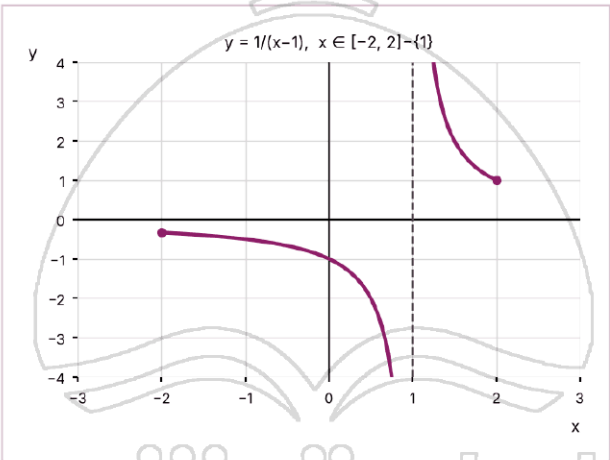
۱۴ صفحه ۵۸ تمرین

**۴) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.**

تابع را فقط روی بازه‌ی بسته‌ی $[-2, 2]$ و بدون نقطه‌ی ۱ تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \qquad x \in [-2, 2],\ x \neq 1$$

چون $\lim\limits_{x \to 1^+} f = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f = -\infty$، خط $x = 1$ مجانب قائم نمودار است. نمودار (دو نقطه‌ی انتهایی توپر هستند):




(پاسخ یکتا نیست؛ هر نمودار با این دامنه و دست‌کم یک مجانب قائم پذیرفته است.)

۱۵ صفحه ۵۸ تمرین

**۵) مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.**

**الف)** $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$

**ب)** $g(x) = \frac{x+3}{x^2-2x}$

**الف)** مخرج در $x = \frac{1}{2}$ صفر می‌شود و صورت در این نقطه $-1/2 - 1 = -1/2$ ناصفر است؛ حدها:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{-1/2}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x-1}{2x-1} = +\infty$$

پس تنها مجانب قائم، خط $x = \frac{1}{2}$ است.

**ب)** مخرج $x^2 - 2x = x(x-2)$ در $x = 0$ و $x = 2$ صفر می‌شود و صورت $x+3$ در این نقطه‌ها برابر ۳ و ۵ (ناصفر) است. حدها:

$$\lim_{x\to 0^+} g = \frac{3}{0^-} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} g = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

پس مجانب‌های قائم تابع، خطوط **$x = 0$** و **$x = 2$** هستند.

(ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده‌اند.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

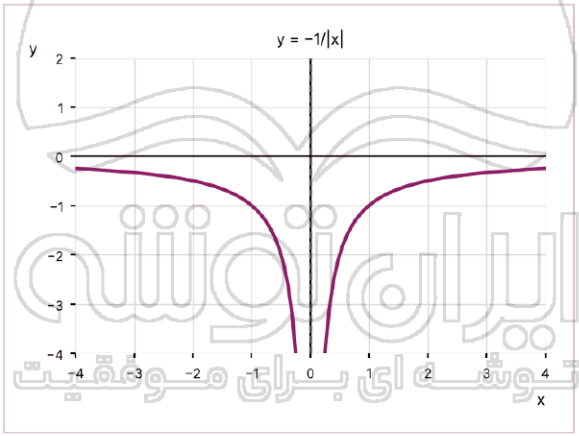
۱۶ صفحه ۵۸ تمرین

**۶) نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟**

چون $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$، با ضرب در ۱-:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\infty$$

پس خط $x = 0$ مجانب قائم است و نمودار در هر دو طرف آن به سمت پایین می‌رود؛ نمودار کاملاً زیر محور x و نسبت به محور y متقارن است:




ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

---

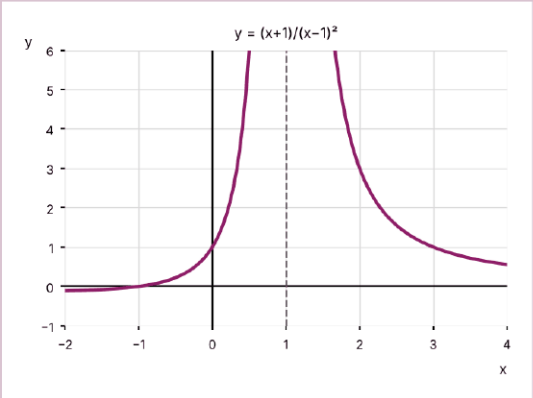
۱۷ صفحه ۵۸ تمرین

**۷) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x = 1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟**
**(شکل‌های الف، ب، پ و ت)**

مخرج $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ همواره نامنفی است و در $x = 1$ صفر می‌شود، در حالی که حد صورت $1+1 = 2 > 0$ است. طبق قضیه‌ی ۳ (بند الف):

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

بنابراین خط $x = 1$ مجانب قائم است و **هر دو شاخه‌ی نمودار در دو طرف آن به سمت بالا ($+\infty$) می‌روند** (مانند نمودار $1/x^2$):




(چهار شکل کتاب در متن در دسترس نبود؛ شکل درست همان است که هر دو شاخه‌ی آن در اطراف $x = 1$ رو به بالا باشند.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۱۸ صفحه ۵۹ **فعالیت**

**نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.**

**۱) جدول زیر را کامل کنید. ($x = 1, 2, 5, 10, 100, 10^3, 10^5, 10^6$)**

**۲) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور $x$ها از $1/5$ کمتر شود، $x$ را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر بگیریم؟**

**۳) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور $x$ها از $1/10$ کمتر شود، $x$ را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟**

**۴) اگر بخواهیم فاصله‌ی $f(x)$ تا محور $x$ها از $1/100$ کمتر شود، $x$ را باید حداقل از چه عددی بزرگ‌تر در نظر بگیریم؟**

**۵) آیا فاصله‌ی $f(x)$ تا محور $x$ها را می‌توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

---

**۱)** با محاسبه‌ی $f(x) = 1/x$:

| $x$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 100 | $10^3$ | $10^5$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1/2 | 1/5 | 1/10 | 1/100 | 1/1000 | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ |

**۲)** فاصله‌ی $f(x)$ تا محور $x$ها برابر $1/x$ است. باید $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$ باشد، یعنی $x > 5$. (به همین ترتیب برای کمتر از $1/2$ باید $x > 2$ باشد.)

**۳)** $\frac{1}{x} < \frac{1}{10} \Rightarrow x > 10$.

**۴)** $\frac{1}{x} < \frac{1}{100} \Rightarrow x > 100$.

**۵)** بله. برای هر عدد مثبت دلخواه ε اگر $x > \frac{1}{\varepsilon}$ انتخاب شود، فاصله‌ی f(x) تا محور xها از ε کمتر می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد f(x) وقتی x به $+\infty$ میل کند صفر است:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**۱۹** صفحه ۶۰ | کار در کلاس

**نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.**

**۱) جدول زیر را کامل کنید. (x = ..., $-10^4$, $-10^3$, −100, −10, −5, −2, −1)**

**۲) اگر بخواهیم فاصله‌ی f(x) تا محور xها کمتر از $1/10^3$ شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟**

**۳) اگر بخواهیم فاصله‌ی f(x) تا محور xها از $1/10^6$ کمتر شود، x را باید از چه عددی کوچک‌تر در نظر بگیریم؟**

**۱)**

| x | −1 | −2 | −5 | −10 | −100 | $-10^3$ | $-10^4$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −1 | −1/2 | −1/5 | −1/10 | −1/100 | −1/1000 | $-1/10^4$ | ... |

**۲)** باید $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{10^3}$ باشد، یعنی $|x| > 1000$ و چون x منفی است، $x < -10^3$.

**۳)** به همین ترتیب $|x| > 10^6$ یعنی $x < -10^6$.

نتیجه: اگر x به اندازه‌ی کافی کوچک شود، f(x) را می‌توان به دلخواه به صفر نزدیک کرد:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**۲۰** صفحه ۶۱ | کار در کلاس

**با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به دست آورید. ($f(x) = 1/x^2$) و نمودار g در شکل)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) =$$

نمودار $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در دو طرف به محور x نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

نمودار g (تابع $g(x) = \frac{1}{x}$) نیز در دو انتها به محور x نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

(نمودار g در متن در دسترس نبود و g(x) = 1/x فرض شده است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

**۲۱** صفحه ۶۴ | کار در کلاس

**۱) مفاهیم $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ را بیان کنید.**

**۲) با توجه به نمودار توابع $y = x$ و $y = x^2$، حدود زیر را مشخص کنید.**

$$\lim_{x\to-\infty} x = \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 =$$

**۱)** «$\lim f(x) = +\infty$ وقتی $x \to -\infty$» یعنی با کوچک‌شدن $x$، مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود؛ برای هر عدد مثبت $M$ عدد $N$ وجود دارد که برای هر $x < N$ داشته باشیم $f(x) > M$.

«$\lim f(x) = -\infty$ وقتی $x \to -\infty$» یعنی با کوچک‌شدن $x$، مقدار $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر شود؛ برای هر عدد منفی $M$ عدد $N$ وجود دارد که برای هر $x < N$ داشته باشیم $f(x) < M$.

**۲)**

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

**۲۲** صفحه ۶۴ | فعالیت

**تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار کتاب در نظر بگیرید.**

**۱) جدول زیر را کامل کنید. ($x = 10^6, 1000, 100, 10, 1, 0, -1, -10, -100, -1000, -10^6$)**

**۲) با افزایش (کاهش) $x$، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟**

**۳) در مورد حدهای $\lim_{x\to-\infty} x^3$ و $\lim_{x\to+\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟**

**۱)**

| $x$ | $-10^6$ | $-1000$ | $-100$ | $-10$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $10$ | $100$ | $1000$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^3$ | $-10^{18}$ | $-10^9$ | $-10^6$ | $-1000$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $1000$ | $10^6$ | $10^9$ | $10^{18}$ |

**۲)** با افزایش $x$ مقدار $f(x)$ بدون محدودیت زیاد می‌شود و با کاهش $x$ بدون محدودیت کم می‌شود.

**۳)**

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty,$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

**الف) اگر** $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ **و** $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$

**(با** $b_m\neq 0$ **) دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید:** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$

**۲) در هر یک از حالت‌های** $n>m$ **و** $n<m$ **و** $n=m$ **حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟**

**۳) به کمک نتیجه‌ی قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.**

**الف)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-7x+1}{2x^2-3x}$

**ب)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+1}{6x^3-2x+1}$

**پ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{4x^3+2x-1}$

**۱ـ الف)** از $x^n$ در صورت و از $x^m$ در مخرج فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=x^{n-m}\cdot\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}}$$

طبق قضیه‌ی ۶ هر جمله‌ی $a/x^k$ در $\pm\infty$ به صفر میل می‌کند و طبق قضیه‌ی ۷ حد کسر داخلی برابر $\frac{a_n}{b_m}$ است.

بنابراین:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

**۲)**

- $n<m$: توان $n-m$ منفی است و $\lim\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=0$.
- $n=m$: حد برابر $\frac{a_n}{b_m}$ است.
- $n>m$: توان $n-m$ مثبت است و حد برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است که به علامت $\frac{a_n}{b_m}$، زوج یا فرد بودن $n-m$ و جهت $(+\infty$ یا $-\infty)$ بستگی دارد.

**۳ـ الف)** $n=3>m=2$:

$$\lim\frac{x^3}{2x^2}=\lim\frac{x}{2}:\qquad x\to+\infty:\ +\infty,\quad x\to-\infty:\ -\infty$$

**ب)** $n=m=3$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{6x^3}=\frac{1}{6}$$

**پ)** $n=2<m=3$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{4x^3}=\lim\frac{1}{4x}=0$$

(ضابطه‌ی بندهای ۳ در منبع ناقص بود و بازسازی شده است.)

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۶۷ کار در کلاس

**به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟**

طبق تعریف، خط $y = L$ مجانب افقی نمودار f است اگر دست‌کم یکی از حدهای $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ برابر L باشد. در هر دو شکل، نمودار در انتهای راست یا چپ به خط $y = 1$ نزدیک می‌شود و فاصله‌ی آن از این خط به دلخواه کوچک می‌شود؛ یعنی $\lim f(x) = 1$ و در نتیجه $y = 1$ مجانب افقی است.

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۲۵ صفحه ۶۸ کار در کلاس

**۱) در کدام‌یک از توابع زیر (شکل‌های الف تا ث)، خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است؟**

خط $y = 2$ وقتی مجانب افقی است که نمودار در انتهای راست یا چپ ($x \to +\infty$) یا ($x \to -\infty$) به این خط نزدیک شود و $\lim f(x) = 2$ باشد. باید دید در کدام شکل‌ها شاخه‌ی نمودار در دوردست‌ها بر خط افقی $y = 2$ «می‌نشیند»: شکل‌های (الف) و (ت) چنین‌اند و در بقیه‌ی شکل‌ها نمودار به عدد دیگری میل می‌کند یا بی‌کران می‌شود.

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۲۶ صفحه ۶۸ کار در کلاس

**۲) مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.**

**الف)** $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ **ب)** $g(x) = x^3$ **پ)** $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

توشه ای برای موفقیت

**الف)**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

پس $y = 2$ مجانب افقی است. مخرج در $x = 1$ صفر و صورت ۳ است: $\lim_{x\to1^+} f = +\infty$ و $\lim_{x\to1^-} f = -\infty$؛ پس $x = 1$ مجانب قائم است.

**ب)** $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$؛ مجانب افقی ندارد. تابع چندجمله‌ای در همه‌ی نقطه‌ها تعریف‌شده است، پس مجانب قائم هم ندارد.

**پ)** درجه‌ی صورت از مخرج بیشتر است: $\lim \frac{x^2}{x} = \lim x = \pm\infty$؛ مجانب افقی ندارد. مخرج در $x = -1$ صفر و صورت ۲ است: $\lim_{x\to-1^+} h = +\infty$ و $\lim_{x\to-1^-} h = -\infty$؛ پس $x = -1$ مجانب قائم است.

(ضابطه‌ی ب در منبع ناقص بود و $g(x) = x^3$ فرض شده است.)

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۲۷ صفحه ۶۹ تمرین

**۱) مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.**

**الف)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ **ب)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$

**الف)** وقتی x به اندازه‌ی کافی بزرگ شود، فاصله‌ی f(x) از عدد ۲ را می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه کوچک کرد؛ یعنی f(x) در انتهای راست به ۲ نزدیک می‌شود (و خط $y = 2$ مجانب افقی است).

**ب)** وقتی x به اندازه‌ی کافی کوچک (منفی با قدرمطلق بزرگ) شود، فاصله‌ی f(x) از عدد ۴ را می‌توان به هر اندازه‌ی دلخواه کوچک کرد؛ یعنی f(x) در انتهای چپ به ۴ نزدیک می‌شود (و $y = 4$ مجانب افقی است).

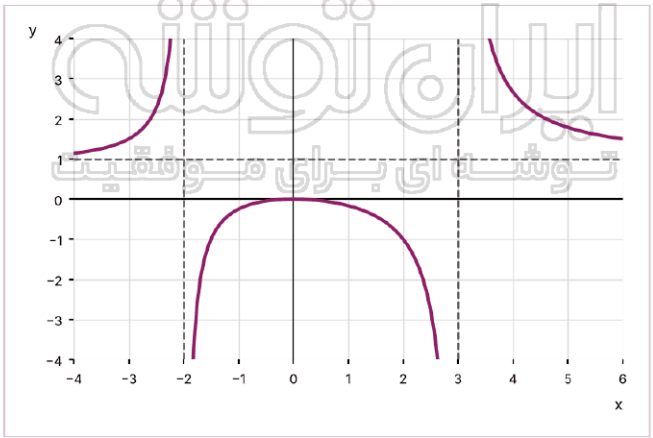
۲۸ صفحه ۶۹ تمرین

**۲) برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید:**

**الف)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **ب)** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **پ)** $\lim_{x\to3^+} f(x)$ **ت)** $\lim_{x\to3^-} f(x)$ **ث)** $\lim_{x\to-2^+} f(x)$

**ج) مجانب‌های افقی و قائم**

نمودار کتاب در متن در دسترس نبود؛ با فرض اینکه نمودار f مانند شکل زیر (تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 6}$) باشد:




- الف) $\lim_{x\to+\infty} f = 1$
- ب) $\lim_{x\to-\infty} f = 1$
- پ) $\lim_{x\to3^+} f = +\infty$
- ت) $\lim_{x\to3^-} f = -\infty$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- ث) $\lim_{x\to -2^+} f = -\infty$
- ج) مجانب افقی: $y = 1$ ؛ مجانب‌های قائم: $x = 3$ و $x = -2$.

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۲۹ صفحه ۶۹ تمرین

**۳) حاصل حدود زیر را به دست آورید:**

**الف)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+3}{x-5}$ **ب)** $\lim_{t\to -\infty} \frac{t^2+2t-3}{2t^2-t+1}$

**پ)** $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-x+2}{x^2+2}$ **ت)** $\lim_{x\to -\infty} (x^3-2x^2+4x-1)$

**الف)** درجه‌ی صورت و مخرج برابر است؛ نسبت ضرایب مرتبه‌ی اول:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+3}{x-5} = \lim \frac{x}{x} = 1$$

**ب)**

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{t^2+2t-3}{2t^2-t+1} = \lim \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

**پ)**

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-x+2}{x^2+2} = \lim \frac{x^2}{x^2} = 1$$

**ت)** حد چندجمله‌ای برابر حد جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه است:

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3-2x^2+4x-1) = \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$$

(ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده‌اند.)

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

---

۳۰ صفحه ۶۹ تمرین

**۴) مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:**

**الف)** $y = \frac{x-1}{x-2}$ **ب)** $y = \frac{3x}{x^2-4}$

**پ)** $y = \frac{2x^2+1}{x^2-1}$ **ت)** $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$

**الف)** $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-1}{x-2} = 1$ ⇒ مجانب افقی $y = 1$. مخرج در $x = 2$ صفر و صورت ۱ ناصفر است ⇒ مجانب قائم $x = 2$.

**ب)** درجه‌ی صورت کمتر از مخرج است: $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x}{x^2-4} = 0$ ⇒ مجانب افقی $y = 0$. مخرج $(x+2)(x-2)$ در $x = \pm 2$ صفر و صورت (۶ و ۶-) ناصفر است ⇒ مجانب‌های قائم $x = 2$ و $x = -2$.

**پ)** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=2$ ⇒ مجانب افقی $y=2$. مخرج در $x=\pm1$ صفر و صورت ۳ است ⇒ مجانب‌های قائم $x=1$ و $x=-1$.

**ت)** $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$ ⇒ مجانب افقی $y=2$. مخرج $x^2+1$ هرگز صفر نمی‌شود ⇒ مجانب قائم ندارد.

(ضابطه‌ها در منبع ناقص بود و بازسازی شده‌اند.)

---

**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

---

۳۱ صفحه ۶۹ تمرین

**۵) نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:**

**الف)** $f(1)=f(-2)=0$

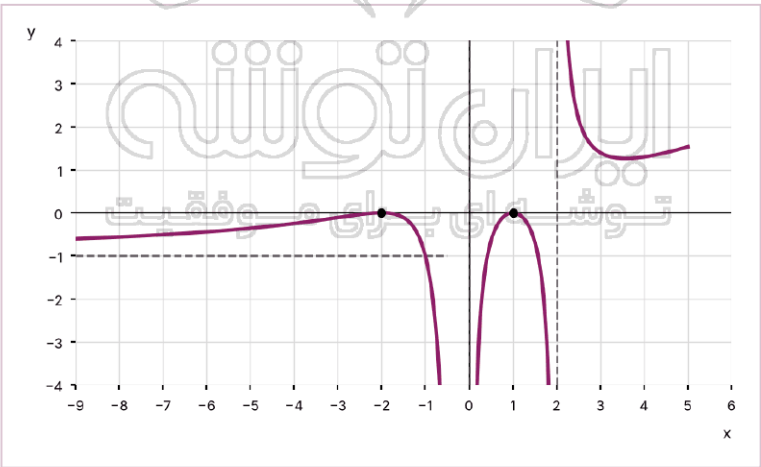
**ب)** $\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

**پ) خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.**

---

نمودار را شاخه‌شاخه می‌سازیم:

- سمت چپ $x=0$: نمودار در انتهای چپ از بالا به $y=-1$ نزدیک می‌شود، در $x=-2$ محور x را لمس می‌کند و سپس تا $-\infty$ در $x=0^-$ پایین می‌رود (مجانب افقی $y=-1$ و $\lim_{x\to0^-}f=-\infty$).
- بین ۰ و ۲: از $-\infty$ در $0^+$ بالا می‌آید، در $x=1$ محور x را لمس می‌کند و دوباره به سمت $-\infty$ در $2^-$ می‌رود.
- سمت راست $x=2$: از $+\infty$ در $2^+$ شروع می‌شود و پایین می‌آید.




نمونه ضابطه‌ی شاخه‌ها: $-(x+2)^2/x^2$ برای $x<0$ ، $-1/x-1/(2-x)-2$ برای $0<x<2$ و $0.4(x-2)+1/(x-2)$ برای $x>2$. (پاسخ یکتا نیست؛ هر نمودار با این شرایط پذیرفته است.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت