با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام حسابان (۲) دوازدهم
فصل دوم

عنوان فصل: مثلثات

از صفحه‌ی ۲۳ تا صفحه‌ی ۴۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل مثلثات آمده است.

مباحث فصل: تناوب و تانژانت؛ معادله‌های مثلثاتی

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۲۵ · فعالیت — تأثیر ضریب a در تابع y = a sin x ۵

۲ صفحه ۲۶ · فعالیت — تأثیر ضریب b در تابع y = sin bx ۶

۳ صفحه ۲۹ · فعالیت — محور تانژانت ۷

۴ صفحه ۳۰ · فعالیت — تغییرات تانژانت در ربع اول ۸

۵ صفحه ۳۰ · کار در کلاس — تغییرات تانژانت در ربع‌های دوم تا چهارم ۸

۶ صفحه ۳۲ · فعالیت — رسم نمودار تابع y = tan x ۹

۷ صفحه ۳۲ · کار در کلاس — یکنوایی تابع تانژانت ۱۰

۸ صفحه ۳۳ · تمرین — تمرین ۱ ـ دوره‌ی تناوب، ماکزیمم و مینیمم ۱۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ صفحه ۳۳ · تمرین — تمرین ۲ ـ نظیرکردن تابع‌ها با نمودارها ۱۱

۱۰ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۳ ـ نوشتن ضابطه از روی دوره و ماکزیمم/مینیمم ۱۲

۱۱ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۴ ـ ضابطه از روی نمودار ۱۳

۱۲ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۵ ـ درست یا نادرست ۱۳

۱۳ صفحه ۳۴ · تمرین — تمرین ۶ ـ مقایسه‌ی $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ ۱۴

۱۴ صفحه ۳۶ · فعالیت — جواب‌های معادله‌ی $\sin x = 1/2$ ۱۴

۱۵ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — حل معادله‌های مثلثاتی ساده ۱۵

۱۶ صفحه ۳۸ · فعالیت — جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \sqrt{3}/2$ ۱۵

۱۷ صفحه ۴۴ · تمرین — تمرین ۱ ـ حل معادله‌های مثلثاتی ۱۶

۱۸ صفحه ۴۴ · تمرین — تمرین ۲ ـ تعداد مثلث‌ها ۱۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۲۵ فعالیت

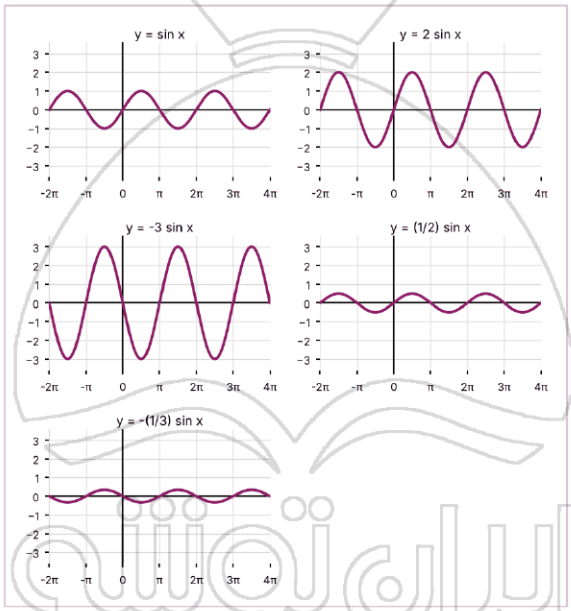
دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع‌ها به ترتیب ۱ و ۱- است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده‌شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

۱) جدول زیر را (با توجه به نمودار هر تابع) کامل کنید.

۲) با توجه به نمودارهای فوق، دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

۳) با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید، مشخص نمایید دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است.

۱) نمودار هر تابع از کشیدن (یا فشردن) نمودار $y = \sin x$ در راستای محور y به دست می‌آید (برای a منفی، نمودار نسبت به محور x قرینه هم می‌شود). نمودارها و جدول کامل‌شده:



تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره‌ی تناوب
$y = \sin x$	1	−1	2π
$y = 2 \sin x$	2	−2	2π
$y = -3 \sin x$	3	−3	2π
$y = (1/2) \sin x$	1/2	−1/2	2π
$y = -(1/3) \sin x$	1/3	−1/3	2π

۲) ضریب a فقط ارتفاع نمودار را تغییر می‌دهد و طول تکرار نمودار را عوض نمی‌کند. بنابراین برای تابع $y = a \sin x$:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$T = 2\pi, \quad max = |a|, \quad min = -|a|$

۳) انتقال عمودی به اندازه‌ی c, دوره‌ی تناوب را تغییر نمی‌دهد ولی مقادیر ماکزیمم و مینیمم را به اندازه‌ی c جابه‌جا می‌کند. پس برای $y = a \sin x + c$:

$T = 2\pi, \quad max = |a| + c, \quad min = -|a| + c$

برای تابع $y = a \cos x + c$ نیز دقیقاً همین نتیجه به دست می‌آید.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

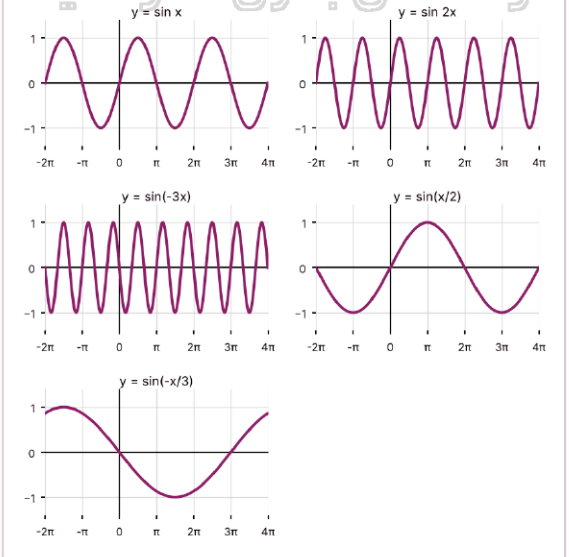
۲ صفحه ۲۶ **فعالیت**

۱) با دقت در نمودار هر یک از توابع داده‌شده، دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید (جدول را کامل کنید). در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده‌شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

۲) با توجه به نمودارهای صفحه‌ی قبل، دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳) با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است. (با انجام مراحلی مشابه می‌توان نشان داد دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.)

۱) ضریب b نمودار را در راستای محور x فشرده ($|b| > 1$) یا کشیده ($|b| < 1$) می‌کند؛ ارتفاع نمودار تغییر نمی‌کند. (علامت منفی b نمودار را نسبت به محور y قرینه می‌کند.)



تابع	ماکزیمم	مینیمم	دوره‌ی تناوب
$y = \sin x$	1	−1	2π
$y = \sin 2x$	1	−1	π
$y = \sin(-3x)$	1	−1	$2\pi/3$
$y = \sin(x/2)$	1	−1	4π
$y = \sin(-x/3)$	1	−1	6π

۲) ضریب b در مقادیر ماکزیمم و مینیمم بی‌تأثیر است ولی دوره‌ی تناوب را تغییر می‌دهد:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad max = 1, \quad min = -1$$

۳) انتقال به اندازه‌ی c دوره را تغییر نمی‌دهد و ماکزیمم و مینیمم را به اندازه‌ی c جابه‌جا می‌کند:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad max = 1 + c, \quad min = -1 + c$$

برای $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز همین نتایج برقرار است.

۳ صفحه ۲۹ **فعالیت**

در دایره‌ی مثلثاتی، خط TAT' در نقطه‌ی A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویه‌ی α را در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه‌ی M' قطع کند. نشان دهید: $\tan\alpha = AM' = b$

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا $\tan(\pi/2)$ عددی حقیقی است؟ $\tan(3\pi/2)$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

الف) فرض کنید H پای عمودی باشد که از M بر محور کسینوس‌ها فرود می‌آید. در این صورت $OH = \cos\alpha$ و $MH = \sin\alpha$. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHM و OAM' یک زاویه‌ی مشترک α در رأس O دارند، پس متشابه‌اند و داریم:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{MH}{OH} = \frac{AM'}{OA} = \frac{AM'}{1} = AM' = b$$

(شعاع دایره‌ی مثلثاتی برابر $OA = 1$ است.)

ب) مقدار $\tan\alpha$ برابر طول (جهت‌دار) AM' است، یعنی عرض نقطه‌ی برخورد خط شامل ضلع انتهایی زاویه با محور تانژانت. اگر انتهای کمان در ربع اول باشد، ضلع انتهایی محور تانژانت را بالای A قطع می‌کند (مقدار مثبت). اگر انتهای کمان در ربع سوم باشد، امتداد ضلع انتهایی (از سمت مخالف مبدأ) باز هم محور تانژانت را بالای A قطع می‌کند، پس $\tan\alpha$ مثبت است. در ربع دوم و چهارم، خط شامل ضلع انتهایی محور تانژانت را زیر A قطع می‌کند و مقدار $\tan\alpha$ منفی است. (به بیان جبری: $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ و علامت sin و cos در ربع‌های اول و سوم هم‌علامت و در ربع‌های دوم و چهارم مختلف‌العلامت است.)

پ) ضلع انتهایی زاویه‌ی $\pi/2$ روی محور سینوس‌هاست و با محور تانژانت (که بر محور کسینوس‌ها عمود است) موازی است؛ پس آن را قطع نمی‌کند و $\tan(\pi/2)$ تعریف‌نشده است (عدد حقیقی نیست). همچنین ضلع انتهایی زاویه‌ی $3\pi/2$ نیز روی محور سینوس‌هاست و محور تانژانت را قطع نمی‌کند، پس $\tan(3\pi/2)$ هم عدد حقیقی نیست. (از نظر جبری $\cos(3\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ و تقسیم بر صفر ممکن نیست.)

۴ صفحه ۳۰ **فعالیت**

با تغییر زاویه‌ی α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه‌ی α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه‌ی α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\pi/2$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.

الف) وقتی α به $\pi/2$ نزدیک می‌شود، ضلع انتهایی زاویه به محور سینوس‌ها نزدیک می‌شود و محل برخورد آن با محور تانژانت هر لحظه بالاتر می‌رود. پس $\tan\alpha$ بدون هیچ کران بالایی افزایش می‌یابد (به $+\infty$ میل می‌کند) و هر عدد مثبت دلخواهی را اختیار می‌کند:

$$\alpha \to \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \tan\alpha \to +\infty$$

ب) روی محور تانژانت نقطه‌ی T به ارتفاع a را (بالای A مشخص می‌کنیم و آن را به مرکز دایره (O) وصل می‌کنیم. خط OT دایره را در نقطه‌ای در ربع اول قطع می‌کند؛ زاویه‌ای که این پاره‌خط با جهت مثبت محور کسینوس‌ها می‌سازد همان α است و $\tan\alpha = a$. چون tan در بازه‌ی $(0, \pi/2)$ صعودی است و همه‌ی مقدارهای مثبت را می‌گیرد، چنین α یکتاست و $0 < \alpha < \pi/2$.

۵ صفحه ۳۰ **کار در کلاس**

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) بازه‌ی تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↑ به معنی افزایش یافتن و علامت ↓ به معنی کاهش یافتن است.)

الف و ب) با حرکت نقطه‌ی انتهای کمان روی دایره و بالا و پایین رفتن نقطه‌ی برخورد با محور تانژانت، در هر سه ربع روند تغییر **افزایشی** است:

ربع	زوایا	افزایشی یا کاهشی	tan بازه‌ی تغییرات
اول	$(0, \pi/2)$	افزایشی	$(0, +\infty)$
دوم	$(\pi/2, \pi)$	افزایشی	$(-\infty, 0)$
سوم	$(\pi, 3\pi/2)$	افزایشی	$(0, +\infty)$
چهارم	$(3\pi/2, 2\pi)$	افزایشی	$(-\infty, 0)$

پ) مقادیر تانژانت زوایای خاص در هر ربع (در تمام ربع‌ها مقدار تانژانت از چپ به راست افزایش می‌یابد؛ در $\pi/2$ و $3\pi/2$ تانژانت تعریف‌نشده است):

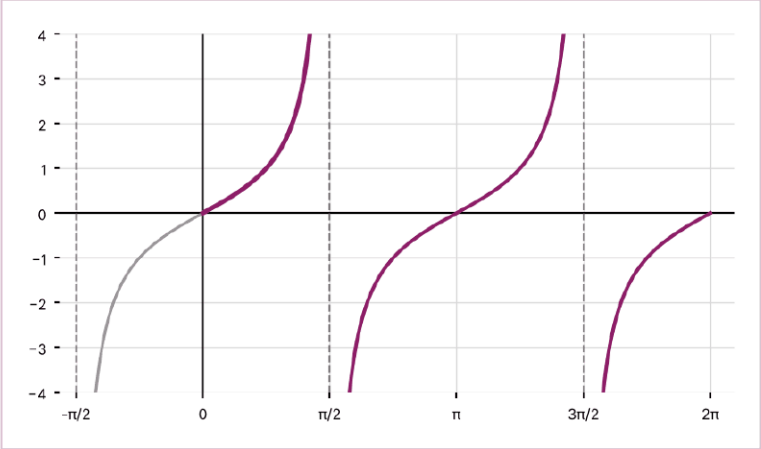
ربع	زوایا	tan مقادیر	روند
اول	$0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$	$0, \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$، تعریف‌نشده	↑
دوم	$\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$	تعریف‌نشده، $0, -\sqrt{3}/3, -1, -\sqrt{3}$	↑
سوم	$\pi, 7\pi/6, 5\pi/4, 4\pi/3, 3\pi/2$	$0, \sqrt{3}/3, 1, \sqrt{3}$، تعریف‌نشده	↑
چهارم	$3\pi/2, 5\pi/3, 7\pi/4, 11\pi/6, 2\pi$	تعریف‌نشده، $0, -\sqrt{3}/3, -1, -\sqrt{3}$	↑

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir
ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶ صفحه ۳۲ **فعالیت**

در شکل کتاب نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.

با استفاده از مقادیر جدول کار در کلاس صفحه‌ی ۳۰ و ۳۱ و با توجه به اینکه تابع با دوره‌ی π تناوبی است و در $x = \pi/2 + k\pi$ تعریف نشده است (خط‌چین‌ها مجانب قائم‌اند)، نمودار در بازه‌ی $[-\pi/2, 2\pi]$ به صورت زیر است. تکه‌ی ربع اول پررنگ‌تر و تکه‌ی ربع چهارم قبلی به رنگ خاکستری نشان داده شده است.



نمودار، تکه‌هایی صعودی است که هر کدام روی بازه‌ی $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌رود و محور x را در $x = k\pi$ قطع می‌کند.

۷ صفحه ۳۲ **کار در کلاس**

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه‌ی $[0, 2\pi] - \{\pi/2, 3\pi/2\}$ بررسی کنید.

مجموعه‌ی داده‌شده را به سه بازه تقسیم می‌کنیم: $[0, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ و $(3\pi/2, 2\pi]$. روی هر یک از این بازه‌ها تابع تانژانت **صعودی** است (طبق نمودار و جدول ربع‌ها، مقدار tan در هر ربع افزایش می‌یابد و در بازه‌ی $(\pi/2, 3\pi/2)$ که شامل ربع‌های دوم و سوم است نیز از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد).

اما روی کل مجموعه تابع صعودی نیست؛ برای مثال:

$$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \quad , \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1 > \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$

(در $\pi/4$ و $3\pi/4$ اولی در بازه‌ی اول و دومی در بازه‌ی دوم قرار دارد.) پس تانژانت روی هر بازه‌ی پیوسته‌ی دامنه‌اش صعودی است ولی روی کل مجموعه‌ی داده‌شده یکنوا نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ صفحه ۳۳ **تمرین**

۱) دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2\sin 7x$ ب) $y = -(3/2)\cos \pi x$

پ) $y = -\pi \sin(x/2) - 2$ ت) $y = -(3/4)\cos 3x$

از فرمول‌های $y = a\sin bx + c$ یا $y = a\cos bx + c$ استفاده می‌کنیم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

الف) $a = 2, b = 7, c = 1$:

$$T = \frac{2\pi}{7}, \quad max = 2 + 1 = 3, \quad min = -2 + 1 = -1$$

ب) $|a| = 3/2, b = \pi, c = 0$:

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad max = \frac{3}{2}, \quad min = -\frac{3}{2}$$

پ) $|a| = \pi, b = 1/2, c = -2$:

$$T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi, \quad max = \pi - 2, \quad min = -\pi - 2$$

ت) $|a| = 3/4, b = 3, c = 0$:

$$T = \frac{2\pi}{3}, \quad max = \frac{3}{4}, \quad min = -\frac{3}{4}$$

۹ صفحه ۳۳ تمرین

۲) هر یک از توابع داده‌شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = -(1/2) \cos x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$

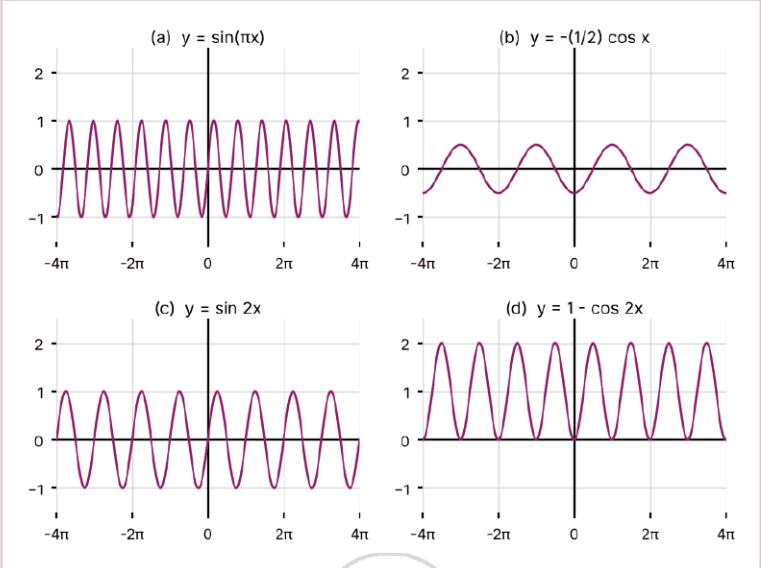
(چهار نمودار شماره‌دار ۱ تا ۴ در کتاب آمده است.)

برای نظیرکردن، دوره‌ی تناوب و بازه‌ی مقادیر هر تابع را حساب می‌کنیم:

تابع	دوره‌ی تناوب	مینیمم و ماکزیمم	ویژگی نمودار
الف) $y = \sin \pi x$	2	$-1, 1$	نوسان بسیار فشرده؛ از مبدأ می‌گذرد؛ در بازه‌ی 2π دقیقاً ۲ دوره
ب) $y = -(1/2) \cos x$	2π	$-1/2, 1/2$	نمودار کم‌ارتفاع؛ در $x = 0$ مینیمم $(-1/2)$ دارد
پ) $y = \sin 2x$	π	$-1, 1$	از مبدأ می‌گذرد؛ ارتفاع بین -1 و 1
ت) $y = 1 - \cos 2x$	π	$0, 2$	کاملاً بالای محور x (یا روی آن)؛ در $x = 0$ مینیمم صفر دارد

نمودارهای این چهار تابع به صورت زیر هستند؛ هر نمودار کتاب را با ویژگی‌های بالا (دوره‌ی تناوب، ماکزیمم، مینیمم و مقدار در $x = 0$) به تابع مربوط وصل می‌کنیم:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



نکته: چون نمودارهای ۱ تا ۴ کتاب در متن در دسترس نبود، نظیر دقیق شماره‌ها ممکن است جابه‌جا باشد، ولی ویژگی‌های هر تابع به‌طور یکتا تعیین‌کننده‌ی نمودار آن است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۳۴ تمرین

۳) در هر مورد ضابطه‌ی تابعی مثلثاتی با دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده را بنویسید.

الف) $T = \pi, \min = -3, \max = 3$

ب) $T = 3, \min = 3, \max = 9$

پ) $T = 4\pi, \min = -7, \max = -1$

ت) $T = \pi/2, \min = -1, \max = 1$

تابع را به صورت $y = a \sin bx + c$ در نظر می‌گیریم (می‌توان از کسینوس هم استفاده کرد):

$$c = \frac{\max + \min}{2}, \qquad |a| = \frac{\max - \min}{2}, \qquad |b| = \frac{2\pi}{T}$$

الف) $c = 0, a = 3, b = 2\pi/\pi = 2$:

$$y = 3\sin 2x$$

ب) $c = (9+3)/2 = 6, a = 3, b = 2\pi/3$:

$$y = 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 6$$

پ) $c = (-1-7)/2 = -4, a = 3, b = 2\pi/4\pi = 1/2$:

$$y = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 4$$

ت) $c = 0, a = 1, b = 2\pi/(\pi/2) = 4$:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$y = \sin 4x$

(پاسخ یکتا نیست؛ برای نمونه می‌توان در هر مورد از $y = a\cos bx + c$ یا با علامت‌های متفاوت a و b نیز استفاده کرد.)

۱۱ صفحه ۳۴ تمرین

۴) ضابطه‌ی مربوط به هر یک از نمودارهای داده‌شده را بنویسید. (نمودارهای الف و ب در کتاب آمده است.)

روش: از روی نمودار ماکزیمم، مینیمم و دوره‌ی تناوب را می‌خوانیم و سپس از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$c = \frac{\max + \min}{2}, \qquad |a| = \frac{\max - \min}{2}, \qquad |b| = \frac{2\pi}{T}$$

علامت a را از شکل نمودار تشخیص می‌دهیم (نمودار سینوسی که از مبدأ با شیب مثبت می‌گذرد یعنی a, b هم‌علامت‌اند؛ نمودار کسینوسی که در $x = 0$ مینیمم دارد یعنی a منفی است).

الف) با فرض ماکزیمم ۱, مینیمم -3 و دوره‌ی تناوب 4π (نمودار سینوسی که از نقطه‌ی $(-1, 0)$ می‌گذرد):

$$c = -1,\ |a| = 2,\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

ب) با فرض ماکزیمم ۳, مینیمم -3, دوره‌ی تناوب 8π و مینیمم در $x = 0$ (نمودار کسینوسی وارونه):

$$c = 0,\ |a| = 3,\ b = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -3\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲ صفحه ۳۴ تمرین

۵) کدام یک از جمله‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

الف) نادرست. تانژانت روی هر بازه‌ی $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ صعودی است ولی روی کل دامنه (که از چند بازه‌ی جدا تشکیل شده) صعودی نیست؛ مثلاً $3\pi/4 > \pi/4$ اما $\tan(\pi/4) = 1 > \tan(3\pi/4) = -1$.

ب) نادرست. در هر بازه‌ای که تانژانت تعریف شده باشد (و در نتیجه شامل هیچ‌یک از نقطه‌های $\pi/2 + k\pi$ نباشد), تابع صعودی است؛ پس بازه‌ای که تابع در آن نزولی باشد وجود ندارد.

پ) درست. هر بازه‌ای که تابع در آن تعریف شده باشد، زیربازه‌ای از یکی از بازه‌های $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ است و روی آن بازه‌ها تانژانت صعودی است.

ایران توشه
مسیر روشن برای موفقیت

۱۳ صفحه ۳۴ تمرین

۶) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \pi/2$ ب) $\pi < \alpha < 3\pi/2$

الف) در ربع سوم، $\sin\alpha < 0$ (نقطه‌ی انتهای کمان زیر محور x است) ولی $\tan\alpha > 0$ (امتداد ضلع انتهایی محور تانژانت را بالای A قطع می‌کند). پس همواره:

$$\tan\alpha > 0 > \sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha > \sin\alpha$$

ب) در ربع اول، $0 < \cos\alpha < 1$ و $\sin\alpha > 0$, پس:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \sin\alpha$$

روی شکل: طول پاره‌خط روی محور تانژانت (AM') از طول پاره‌خط روی محور سینوس بیشتر است. پس $\tan\alpha > \sin\alpha$.

۱۴ صفحه ۳۶ فعالیت

اکنون معادله‌ی $\sin x = 1/2$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت بعد به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

۱) چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر 1/2 است مثال بزنید.

۲) خط $y = 1/2$ و نمودار $y = \sin x$ را در شکل کتاب رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده‌شده در شکل هستند؟

۳) طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = 1/2$ و $y = \sin x$ را که در شکل مشخص شده‌اند، در معادله‌ی $\sin x = 1/2$ جای‌گذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴) در دایره‌ی مثلثاتی، خط $y = 1/2$ رسم شده است. کدام دسته از زوایای مشخص‌شده روی نمودار سؤال قبل هم‌انتها با زاویه‌ی $\pi/6$ و کدام دسته هم‌انتها با زاویه‌ی $\pi - \pi/6$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته‌ی زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

۱) زاویه‌های $\pi/6, 5\pi/6$ (یعنی $-7\pi/6 = 5\pi/6 - 2\pi$, $13\pi/6 = \pi/6 + 2\pi$, $\pi - \pi/6$) و ... همگی سینوسی برابر 1/2 دارند.

۲) این مقدارها طول نقاط برخورد خط $y = 1/2$ با منحنی $y = \sin x$ هستند؛ به همین دلیل همه‌ی آنها بین نقاط مشخص‌شده روی شکل دیده می‌شوند.

۳) مثلاً $\sin(-7\pi/6) = 1/2, \sin(13\pi/6) = 1/2, \sin(5\pi/6) = 1/2, \sin(\pi/6) = 1/2$؛ همه صدق می‌کنند. نتیجه: طول هر نقطه‌ی تقاطع نمودار $y = \sin x$ با خط $y = 1/2$، یک جواب معادله‌ی $\sin x = 1/2$ است و برعکس.

۴) دسته‌ی اول (هم‌انتها با $\pi/6$) و دسته‌ی دوم (هم‌انتها با $5\pi/6 = \pi - \pi/6$):

دسته	زوایا
هم‌انتها با $\pi/6$	$\dots, -11\pi/6, \pi/6, 13\pi/6, 25\pi/6, \dots$
هم‌انتها با $5\pi/6$	$\dots, -7\pi/6, 5\pi/6, 17\pi/6, 29\pi/6, \dots$

هر دو دسته را می‌توان از هر دو طرف با افزودن یا کم‌کردن مضرب‌های 2π ادامه داد. به این ترتیب جواب‌های کلی معادله چنین است:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \ k \in \mathbb{Z}$$

۱۵ صفحه ۳۷ **کار در کلاس**

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ **ب)** $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

از رابطه‌ی $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ استفاده می‌کنیم (k عددی صحیح).

الف) داریم:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

ب) داریم:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۳۸ **فعالیت**

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \sqrt{3}/2$ در شکل کتاب رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \sqrt{3}/2$ را بیابید.

الف) برخی از جواب‌های معادله‌ی $\cos x = \sqrt{3}/2$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی و محل تقاطع خط $x = \sqrt{3}/2$ با دایره‌ی مثلثاتی، جواب‌های معادله‌ی فوق را به دست آورید.

الف) طول نقاط تقاطع نمودار $y = \cos x$ با خط $y = \sqrt{3}/2$ جواب‌های معادله‌اند. چون $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ و $\cos$ x تابعی زوج و با دوره‌ی 2π است، نمونه‌هایی از جواب‌ها:

$$x = \frac{\pi}{6},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6},\ -\frac{11\pi}{6},\ \dots$$

ب) خط $x = \sqrt{3}/2$ دایره‌ی مثلثاتی را در دو نقطه (در ربع اول و چهارم) قطع می‌کند که انتهای کمان‌های $\pi/6$ و $-\pi/6$ هستند. با افزودن مضرب‌های صحیح 2π (دوران‌های کامل) به این دو کمان، جواب‌های کلی چنین به دست می‌آید:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \implies x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۷ صفحه ۴۴ تمرین

۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\sin x = \sin(2\pi/3)$ ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$ ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = 1/4$ ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

چ) $\tan(2x - 1) = 0$ ح) $\tan 3x = \tan \pi x$

الف) $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + \pi - \alpha$، با $\alpha = 2\pi/3$:

$$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

ب) با $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \qquad \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

پ) $\cos 2x = \cos x$:

$$2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{or} \quad 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi$$

جواب‌های دسته‌ی اول در دسته‌ی دوم (به ازای k مضرب ۳) هم هستند؛ پس جواب کلی:

$$x = \frac{2k\pi}{3},\quad k \in \mathbb{Z}$$

ت) با $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$\sin x = -2$ غیرممکن است. پس $\sin x = 1/2$:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

ث) با $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$$

$\sin x = -3/2$ غیرممکن است. پس $\sin x = 1/2$:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{or} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

ج) با $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{or} \quad 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \qquad \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

ج) $\tan(2x - 1) = 0 = \tan 0 \Rightarrow 2x - 1 = k\pi$, پس:

$$x = \frac{k\pi + 1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ج) $\tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = \pi x + k\pi \Rightarrow (3 - \pi)x = k\pi$, پس:

$$x = \frac{k\pi}{3 - \pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(به ازای این x ها $\cos 3x$ و $\cos \pi x$ صفر نمی‌شوند: برای $k = 0$ داریم $x = 0$ و برای $k \neq 0$, x عددی گنگ است و $3x$ و πx مضرب فرد $\pi/2$ نیستند؛ پس همه‌ی جواب‌ها قابل قبول‌اند.)

۱۸ صفحه ۴۴ **تمرین**

۲) مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

اگر زاویه‌ی بین دو ضلع ۲ و ۶ برابر θ باشد, $(0 < \theta < \pi)$ مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\theta = 6\sin\theta = 3 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

جواب‌های این معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ عبارت‌اند از:

$$\theta = \frac{\pi}{6} (30^\circ) \quad \text{or} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} (150^\circ)$$

برای هر یک از این دو زاویه (طبق حالت «ض‌زض») دقیقاً یک مثلث (با ضلع سوم متفاوت) ساخته می‌شود. بنابراین **دو مثلث** با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir