با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام حسابان (۲) دوازدهم
فصل اول

عنوان فصل: تابع

از صفحه‌ی ۱ تا صفحه‌ی ۲۲ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل تابع آمده است.

مباحث فصل: تبدیل نمودار توابع؛ تابع درجه سوم، توابع یکنوا، بخش‌پذیری و تقسیم

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۴ · کار در کلاس — انتقال تابع ریشه‌ی دوم	۶
۲	صفحه ۵ · کار در کلاس — رسم نمودار با انتقال	۶
۳	صفحه ۶ · فعالیت — انبساط و انقباض عمودی	۷
۴	صفحه ۷ · کار در کلاس — دامنه و برد k·f(x)	۸
۵	صفحه ۷ · کار در کلاس — رسم با انبساط، انقباض و قرینه	۸
۶	صفحه ۸ · کار در کلاس — رسم −2+f(x−1) مرحله‌به‌مرحله	۹
۷	صفحه ۸ · فعالیت — انبساط و انقباض افقی	۱۰
۸	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — دامنه و برد f(kx)	۱۱
۹	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — رسم f(3x) و f(−x/2)	۱۱
۱۰	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — رسم نمودارهای کسینوسی	۱۲
۱۱	صفحه ۱۰ · کار در کلاس — پرسش‌های مثال f(2x+1)	۱۳
۱۲	صفحه ۱۱ · تمرین — تمرین ۱ تبدیل نمودار ریشه‌ی دوم	۱۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۱۲ · تمرین — تمرین ۲ تبدیل‌های f ۱۴

۱۴ صفحه ۱۲ · تمرین — تمرین ۳ قرینه‌ها ۱۵

۱۵ صفحه ۱۲ · تمرین — تمرین ۴ ضابطه از نمودار ۱۶

۱۶ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — درجه‌ی چندجمله‌ای‌ها ۱۷

۱۷ صفحه ۱۴ · فعالیت — تابع x^3 و وارون آن ۱۷

۱۸ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — رسم نمودار توابع درجه‌ی سوم ۱۸

۱۹ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — مقایسه‌ی x^2 و x^3 ۱۹

۲۰ صفحه ۱۵ · فعالیت — شاخص کیفیت هوا ۱۹

۲۱ صفحه ۱۷ · کار در کلاس — اکیداً صعودی و نزولی ۲۰

۲۲ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — تابع دوضابطه‌ای ۲۰

۲۳ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — صعودی و اکیداً صعودی ۲۱

۲۴ صفحه ۱۸ · کار در کلاس — نامساوی با تابع یکنوا ۲۱

۲۵ صفحه ۱۸ · فعالیت — تقسیم چندجمله‌ای‌ها ۲۲

۲۶ صفحه ۱۹ · فعالیت — باقیمانده‌ی تقسیم بر $ax+b$ ۲۲

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — قضیه‌ی باقیمانده ۲۳

۲۸ صفحه ۱۹ · کار در کلاس — بخش‌پذیری x^4-16 بر $x+2$ ۲۳

۲۹ صفحه ۲۰ · فعالیت — اتحاد x^n - a^n ۲۳

۳۰ صفحه ۲۰ · کار در کلاس — اتحاد برای x^n + a^n و تجزیه ۲۴

۳۱ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۱ تابع $(x-2)^3+1$ ۲۴

۳۲ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۲ یکنوایی از روی نمودار ۲۵

۳۳ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۳ نمودار و یکنوایی ۲۶

۳۴ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۴ صعودی و نزولی هم‌زمان ۲۶

۳۵ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۵ جمع و تفاضل توابع ۲۷

۳۶ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۶ باقیمانده ۲۷

۳۷ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۷ بخش‌پذیری ۲۷

۳۸ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۸ تجزیه ۲۸

۳۹ صفحه ۲۲ · تمرین — تمرین ۹ نامساوی با تابع نزولی ۲۸

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۴ | کار در کلاس

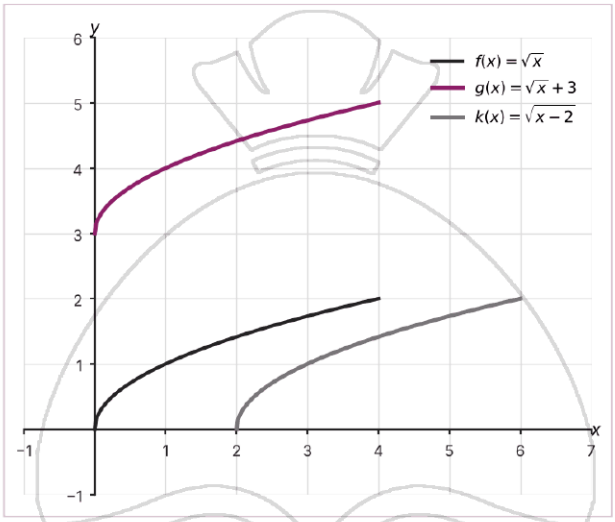
الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه‌ی [۰,۴] رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار توابع $g(x) = f(x) + ۳$ و $k(x) = f(x - ۲)$ را به کمک انتقال رسم کنید.

پ) دامنه و برد توابع g و k را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

الف) برای x در [۰,۴] داریم $۰ \le \sqrt{x} \le ۲$ ، پس برد f برابر [۰,۲] است.

ب) نمودار g از انتقال نمودار f به اندازه‌ی ۳ واحد به سمت بالا و نمودار k از انتقال آن به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت راست به دست می‌آید.



پ) دامنه‌ی g همان [۰,۴] است و برد آن [۳,۵] می‌شود، یعنی برد ۳ واحد بالا می‌رود و دامنه تغییری نمی‌کند. دامنه‌ی k برابر [۲,۶] است (دامنه ۲ واحد به راست می‌رود) و برد آن همان [۰,۲] است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

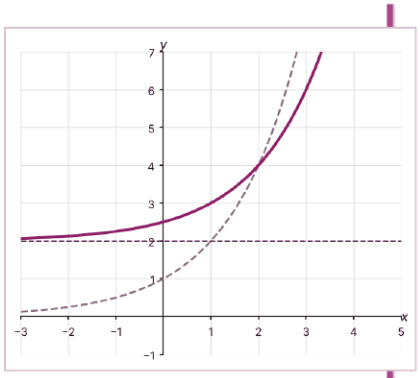
۲ صفحه ۵ | کار در کلاس

در زیر نمودار توابع $y = ۲^x$ ، $y = \log_۲ x$ و $y = \cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y = ۲^{x-۱} + ۲$ ، $y = \log_۲ (x + ۲)$ و $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$ را به کمک انتقال رسم کنید.

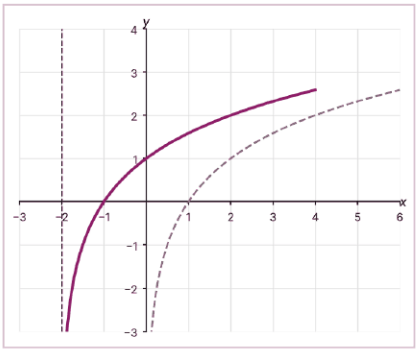
الف) نمودار $y = ۲^x$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا می‌بریم؛ مجانب افقی از $y = ۰$ به $y = ۲$ می‌رود.

ب) نمودار $y = \log_۲ x$ را ۲ واحد به چپ می‌بریم؛ مجانب قائم از $x = ۰$ به $x = -۲$ می‌رود.

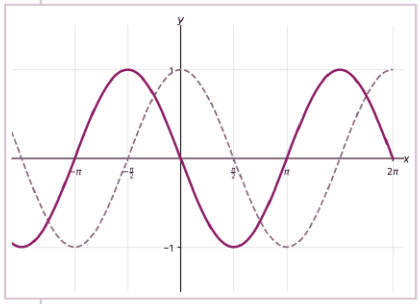
پ) نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به چپ می‌بریم (حاصل همان $y = -\sin x$ است).



الف



ب



پ

در هر نمودار، منحنی خط‌چین نمودار تابع اصلی است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۳ صفحه ۶ **فعالیت**

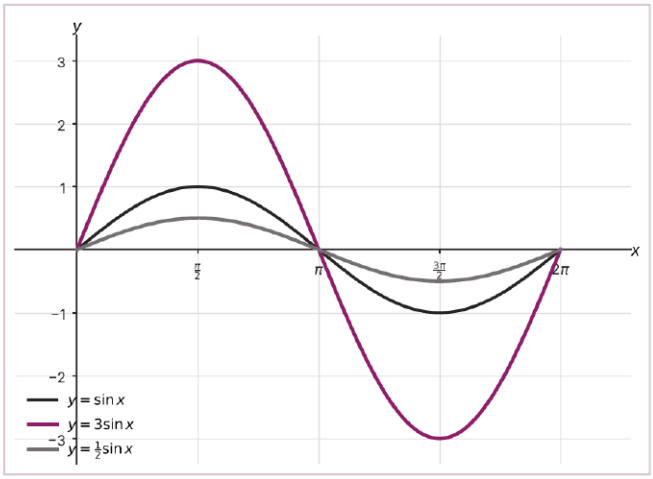
۱) در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = ۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

۲) با مقایسه‌ی نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y = \sin x$ دارند؟

۳) دامنه و برد توابع $y = ۳\sin x$ و $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y = \sin x$ دارند؟

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y = \sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰
$y = ۳\sin x$	۰	۳	۰	-۳	۰
$y = \frac{۱}{۲}\sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



۲) در $y = ۳\sin x$ عرض هر نقطه ۳ برابر شده است (انبساط عمودی با ضریب ۳) و در $y = \frac{۱}{۲}\sin x$ عرض هر نقطه نصف شده است (انقباض عمودی). نقاط برخورد با محور xها تغییر نمی‌کنند.

۳) دامنه‌ی هر سه تابع یکسان (R) است. برد $\sin x$ بازه‌ی $[-۱,۱]$ است، اما برد $۳\sin x$ بازه‌ی $[-۳,۳]$ و برد $\frac{۱}{۲}\sin x$ بازه‌ی $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ است.

۴ صفحه ۷ **کار در کلاس**

۱) اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = k f(x)$ را برای $k>۰$ و $k<۰$ تعیین کنید.

دامنه تغییری نمی‌کند و برابر $[a,b]$ است. برای برد: اگر $c \le f(x) \le d$ ، آنگاه

- اگر $k>۰$: $kc \le kf(x) \le kd$ ؛ پس برد برابر $[kc,kd]$ است.
- اگر $k<۰$: نامساوی‌ها برعکس می‌شوند، $kd \le kf(x) \le kc$ ؛ پس برد برابر $[kd,kc]$ است.

۵ صفحه ۷ **کار در کلاس**

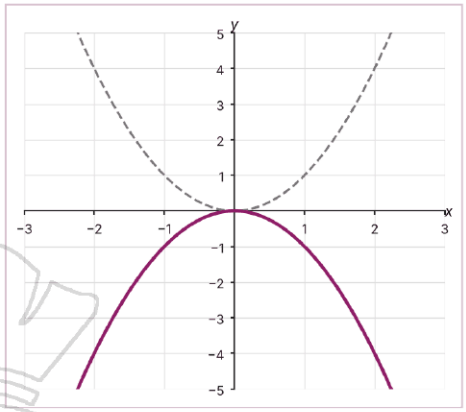
۲) نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^۲$ رسم کنید.

الف) $y = -x^۲$ **ب)** $y = ۲x^۲ - ۱$

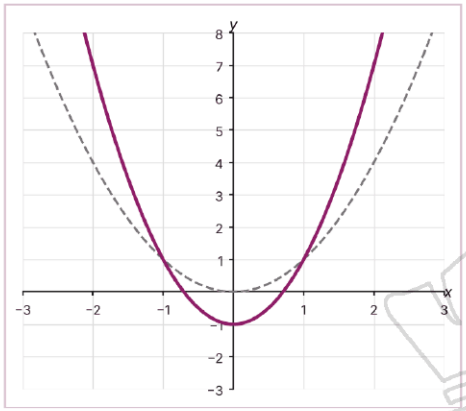
ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را مشخص کنید.

الف) نمودار $y = x^2$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. ب) عرض نقاط را ۲ برابر می‌کنیم (انبساط عمودی) و سپس ۱ واحد به پایین می‌بریم.



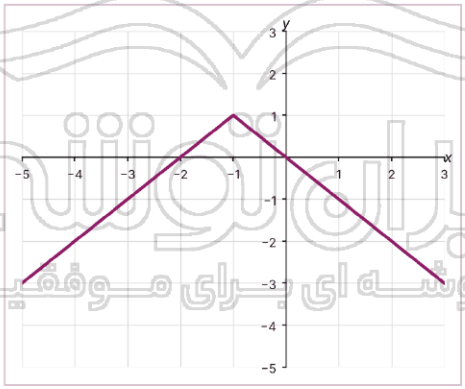
الف



ب

پ) شکل کتاب در دسترس نبود. با فرض این‌که نمودار یک «V» وارونه با رأس (۱,۱−) باشد، ابتدا $y = |x|$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم ($y = -|x|$)، سپس ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا می‌بریم:

$$y = -|x + 1| + 1$$



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶ صفحه ۸ کار در کلاس

۳) نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. با انجام مراحل زیر نمودار تابع $y = -f(x - 1) + 2$ را رسم کنید.

ابتدا $y = f(x)$ ، سپس $y = f(x - ۱)$ ، سپس $y = -f(x - ۱)$ و در پایان $y = -f(x - ۱) + ۲$ را رسم می‌کنیم.

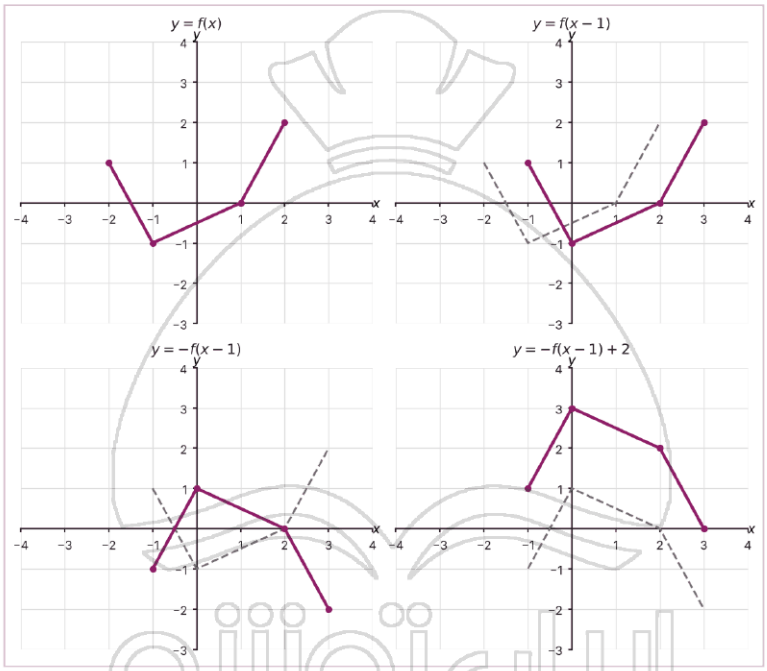
شکل f در دسترس نبود؛ فرض می‌کنیم f خط شکسته‌ای از نقاط (۲,۱-)، (۱-,۱-)، (۱,۰) و (۲,۲) باشد. روش کار مستقل از شکل است:

۱. ۱ واحد انتقال به راست: $y = f(x - ۱)$ (نقطه‌ی (x,y) به (x+۱,y) می‌رود).

۲. قرینه نسبت به محور x: $y = -f(x - ۱)$ (نقطه‌ی (x,y) به (x,-y) می‌رود).

۳. ۲ واحد انتقال به بالا: $y = -f(x - ۱) + ۲$ (نقطه‌ی (x,y) به (x,y+۲) می‌رود).

در مجموع هر نقطه‌ی (x,y) از f به نقطه‌ی (x+۱, ۲-y) می‌رود.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

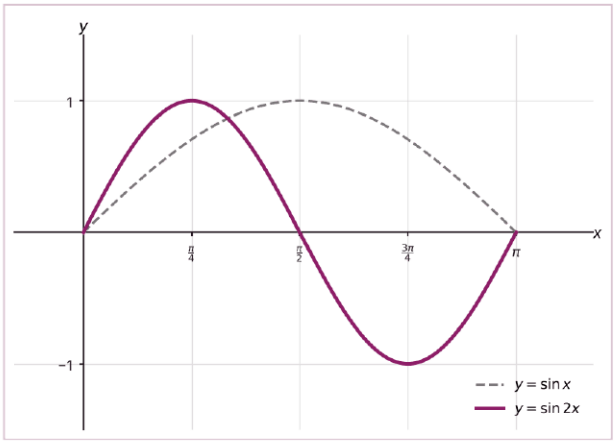
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ صفحه ۸ فعالیت

۱) با تکمیل جدول زیر نقاطی از نمودار تابع $y = \sin ۲x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله‌ی [π,۰] رسم کنید.

۲) با مقایسه‌ی نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = \sin ۲x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$y = \sin ۲x$	۰	۱	۰	۱-	۰



۲) نمودار $y = \sin ۲x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب $\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید: طول نقاط نصف می‌شود، دوره‌ی تناوب از ۲π به π می‌رسد و در بازه‌ی $[\pi,۰]$ یک دوره‌ی کامل رسم می‌شود. برد تغییر نمی‌کند.

۸ صفحه ۱۰ **کار در کلاس**

۱) اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را برای $k>۰$ و $k<۰$ تعیین کنید.

برد تغییر نمی‌کند و برابر $[c,d]$ است. دامنه: باید $a \le kx \le b$ باشد.

- اگر $k>۰$: $\frac{a}{k} \le x \le \frac{b}{k}$ ؛ دامنه $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ است.
- اگر $k<۰$: با تقسیم بر عدد منفی نامساوی برعکس می‌شود: $\frac{b}{k} \le x \le \frac{a}{k}$ ؛ دامنه $[\frac{b}{k}, \frac{a}{k}]$ است.

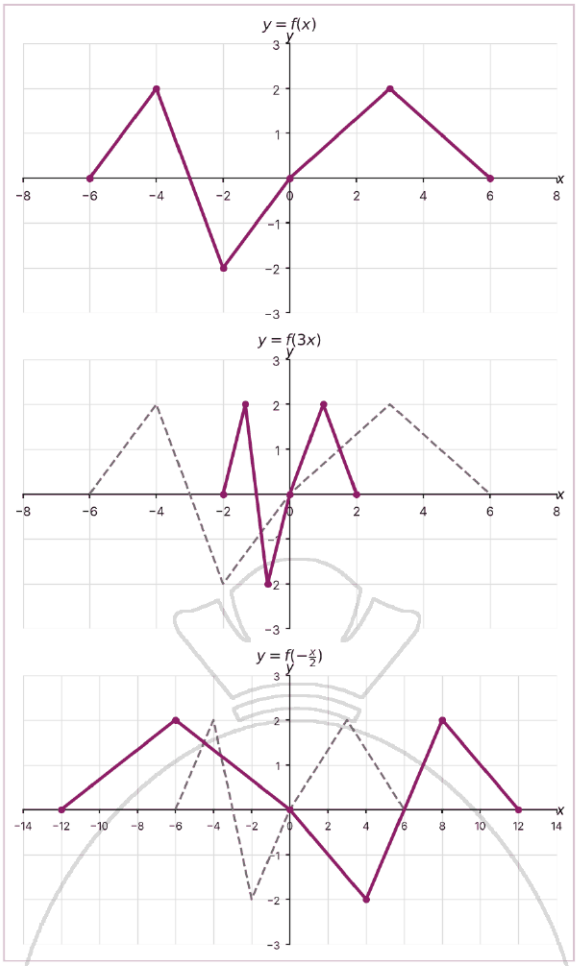
۹ صفحه ۱۰ **کار در کلاس**

۲) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار توابع $y = f(۳x)$ و $y = f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.

شکل f در دسترس نبود؛ f را خط شکسته‌ای از نقاط $(-۶,۰)$، $(-۴,۲)$، $(-۲,-۲)$، $(۰,۰)$، $(۳,۲)$، $(۶,۰)$ فرض می‌کنیم.

- $y = f(۳x)$: انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۳}$ (طول هر نقطه بر ۳ تقسیم می‌شود).
- $y = f(-\frac{x}{۲})$: ابتدا انبساط افقی با ضریب ۲ (طول‌ها ۲ برابر) و سپس قرینه نسبت به محور y (طول‌ها در ۲- ضرب می‌شوند).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۱۰ کار در کلاس

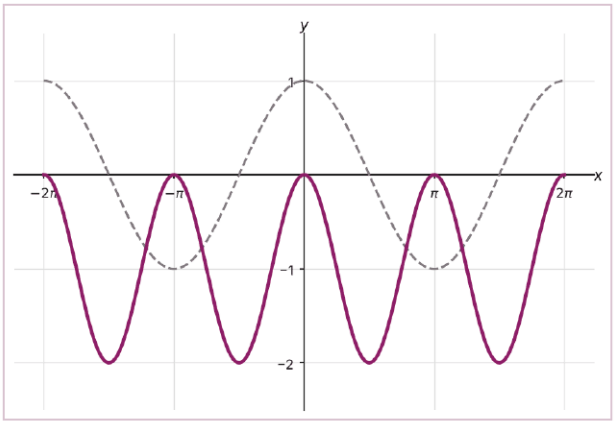
۳) نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

الف) $y = \cos 2x - 1$ **ب)** $y = \cos \frac{2x}{3}$

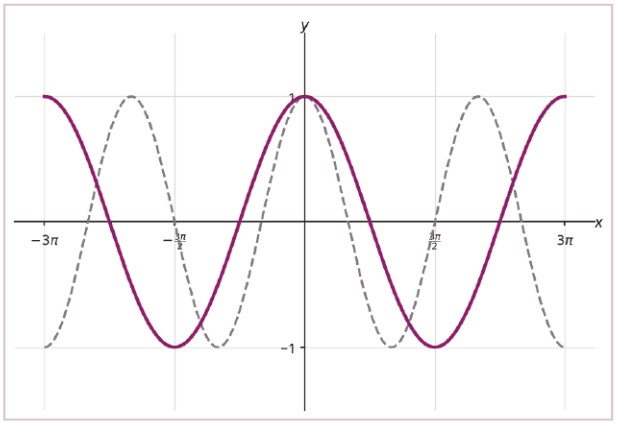
الف) ابتدا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ (دوره‌ی تناوب π) و سپس ۱ واحد انتقال به پایین.

ب) انبساط افقی با ضریب $\frac{3}{2}$ (دوره‌ی تناوب 3π).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



الف



ب

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۱ صفحه ۱۰ کار در کلاس

با توجه به این‌که $\frac{x_0-1}{2}=\frac{x_0}{2}-\frac{1}{2}$ ، آیا می‌توانید روش دیگری برای رسم نمودار تابع $g(x)=f(2x+1)$ پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x)=f(2x+1)$ رسم شود؟ چرا؟

روش دیگر: چون $f(2x+1)=f\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$ ، ابتدا نمودار $y=f(2x)$ (انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$) را رسم می‌کنیم و سپس آن را $\frac{1}{2}$ واحد به چپ می‌بریم.

خیر. اگر $y=f(2x)$ را یک واحد به چپ ببریم، تابع $f(2(x+1))=f(2x+2)$ به دست می‌آید که با $f(2x+1)$ برابر نیست؛ انتقال باید $\frac{1}{2}$ واحد باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

---

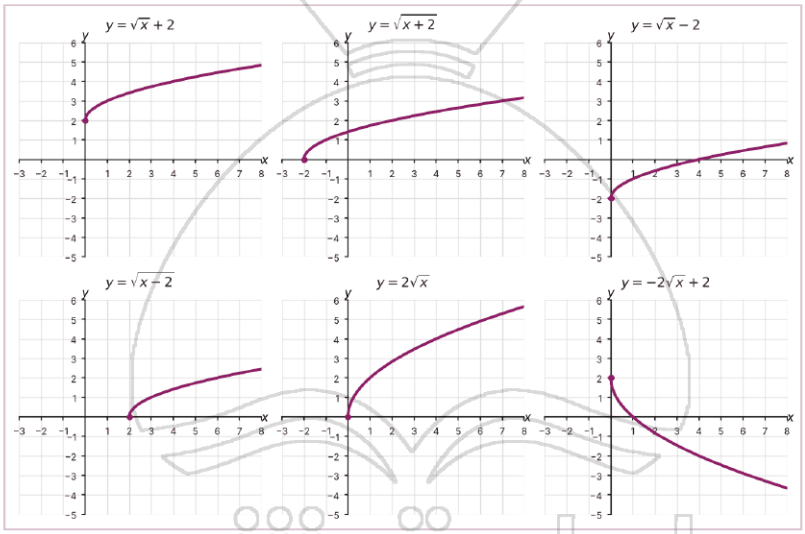
۱۲ صفحه ۱۱ تمرین

۱) هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{x}+2$ **ب)** $y=\sqrt{x+2}$ **پ)** $y=\sqrt{x}-2$ **ت)** $y=2\sqrt{x}$ **ث)** $y=-2\sqrt{x}+2$ **ج)** $y=\sqrt{x-2}$

نمودارها در دسترس نبودند؛ هر تابع با نقطه‌ی شروع و جهت منحنی‌اش مشخص می‌شود:

تابع	نقطه‌ی شروع	ویژگی نمودار	نمودار
$y = \sqrt{x} + ۲$	(۰,۲)	۲ واحد بالاتر از $\sqrt{x}$	(د)
$y = \sqrt{x + ۲}$	(۲,۰−)	۲ واحد به چپ	(ج)
$y = \sqrt{x} - ۲$	(۲−,۰)	۲ واحد پایین‌تر	(الف)
$y = ۲\sqrt{x}$	(۰,۰)	تندتر از $\sqrt{x}$ (انبساط عمودی)	(و)
$y = -۲\sqrt{x} + ۲$	(۰,۲)	رو به پایین	(ب)
$y = \sqrt{x - ۲}$	(۲,۰)	۲ واحد به راست	(ه)



نظیر شدن نمودارها با شکل کتاب از روی ویژگی‌ها حدس زده شده است؛ این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۱۲ تمرین

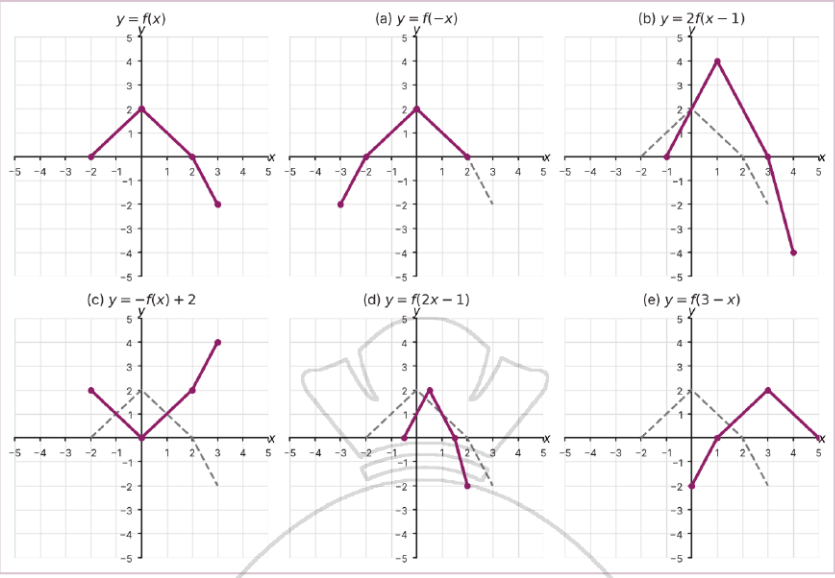
۲) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(-x)$ **ب)** $y = ۲f(x - ۱)$ **پ)** $y = -f(x) + ۲$ **ت)** $y = f(۲x - ۱)$ **ث)** $y = f(۳ - x)$

شکل f در دسترس نبود؛ f را خط شکسته‌ای از (۲,۰−)، (۰,۲)، (۲,۰) و (۳,۲−) فرض می‌کنیم. قاعده‌ی هر تبدیل برای نقطه‌ی (x,y) از f:

- الف) $(x, y) \to (-x, y)$ (قرینه نسبت به محور y)
- ب) $(x, y) \to (x + ۱, ۲y)$ (انتقال ۱ واحد به راست و انبساط عمودی ۲ برابر)

- پ) $(x, y) \to (x, ۲ - y)$ (قرینه نسبت به محور x و ۲ واحد بالا)
- ت) $f(۲x - ۱) = f\left(۲\left(x - \frac{۱}{۲}\right)\right)$: $(x, y) \to \left(\frac{x + ۱}{۲}, y\right)$
- ث) $f(۳ - x) = f(-(x - ۳))$: $(x, y) \to (۳ - x, y)$ (قرینه نسبت به محور y و ۳ واحد به راست)



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

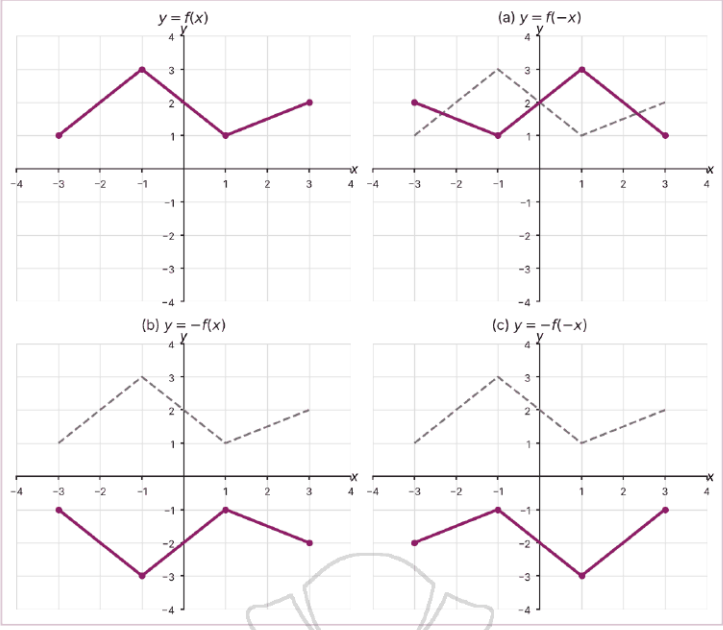
۱۴ صفحه ۱۲ تمرین

۳) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

الف) $y = f(-x)$ **ب)** $y = -f(x)$ **پ)** $y = -f(-x)$

شکل f در دسترس نبود؛ f را خط شکسته‌ای از (−۳,۱)، (−۱,۳)، (۱,۱) و (۳,۲) فرض می‌کنیم.

- الف) قرینه‌ی نمودار f نسبت به محور y.
- ب) قرینه‌ی نمودار f نسبت به محور x.
- پ) قرینه‌ی نمودار f نسبت به مبدأ مختصات (ابتدا نسبت به محور x و سپس نسبت به محور y).



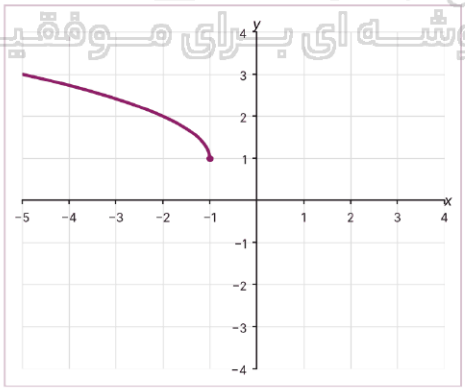
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵ صفحه ۱۲ تمرین

۴) نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.

شکل در دسترس نبود. با فرض این‌که نمودار نیم‌منحنی‌ای رو به چپ با نقطه‌ی شروع (−۱,۱) باشد: ابتدا $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم ($y = \sqrt{-x}$)، سپس ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا می‌بریم:

$$y = \sqrt{-(x+1)} + 1 = \sqrt{-x-1} + 1$$



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۱۳ | کار در کلاس

در زیر چند تابع چندجمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه‌ی هر کدام را مشخص کنید.

$f(x) = ۲x - ۳$ ، $g(x) = (x - ۱)^۲ + ۳$ ، $h(x) = x^۳ + x - ۴$ ، $m(x) = ۵$ ، $n(x) = ۲x - x^۴$ ،

$p(x) = x^۲(۱ - x)^۳$

تابع	درجه	نوع
$f(x) = ۲x - ۳$	۱	تابع درجه یک
$g(x) = (x - ۱)^۲ + ۳ = x^۲ - ۲x + ۴$	۲	تابع درجه دو
$h(x) = x^۳ + x - ۴$	۳	تابع درجه سه
$m(x) = ۵$	۰	تابع درجه صفر (ثابت)
$n(x) = -x^۴ + ۲x$	۴	درجه چهار
$p(x) = x^۲(۱ - x)^۳$	۵	جمله‌ی بزرگ‌تر $-x^۵$

۱۷ صفحه ۱۴ | فعالیت

۱) با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^۳$ را رسم کنید.

۲) به کمک نمودار رسم شده برای $f(x) = x^۳$ ، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳) نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

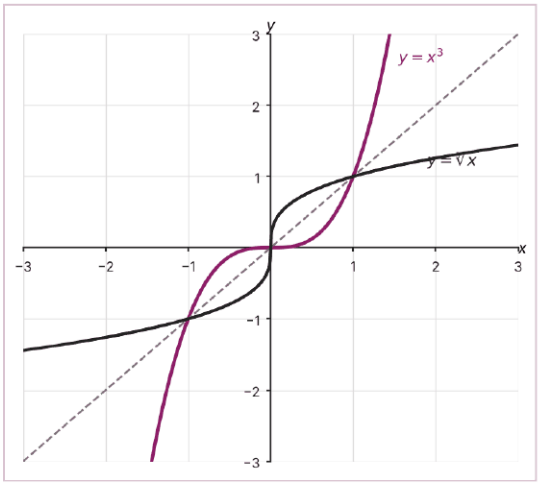
x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
$y = x^۳$	-۸	-۱	$-\frac{۱}{۸}$	۰	$\frac{۱}{۸}$	۱	۸

۲) هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند (تابع یک‌به‌یک است)؛ در واقع $x^۳$ اکیداً صعودی است. پس وارون‌پذیر است.

۳) نمودار $f^{-۱}$ قرینه‌ی نمودار f نسبت به خط $y = x$ است. از $y = x^۳$ نتیجه می‌شود $x = \sqrt[۳]{y}$ ، پس:

$f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

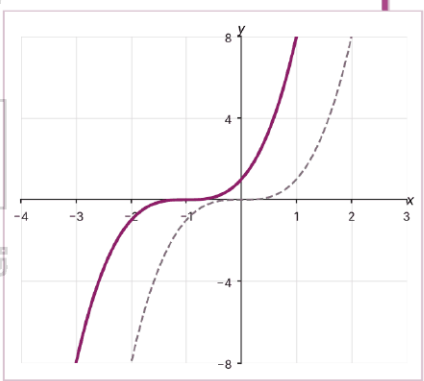


۱۸ صفحه ۱۴ **کار در کلاس**

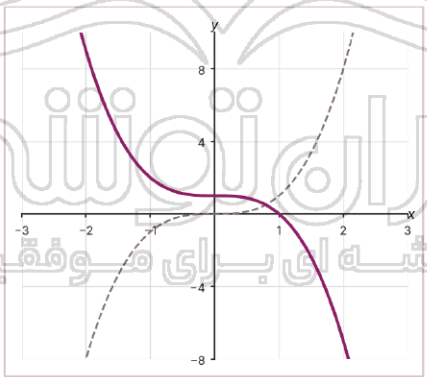
۱) نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

الف) $y = (x+1)^3$ **ب)** $y = -x^3 + 1$ **پ)** $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

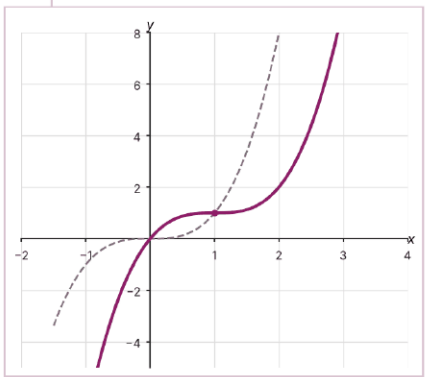
الف) انتقال نمودار $y = x^3$ به اندازه‌ی ۱ واحد به چپ. ب) قرینه نسبت به محور x و سپس ۱ واحد انتقال به بالا. پ) چون $x^3 - 3x^2 + 3x = (x-1)^3 + 1$ ، نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا می‌بریم (مرکز تقارن (۱,۱)).



الف



ب



پ

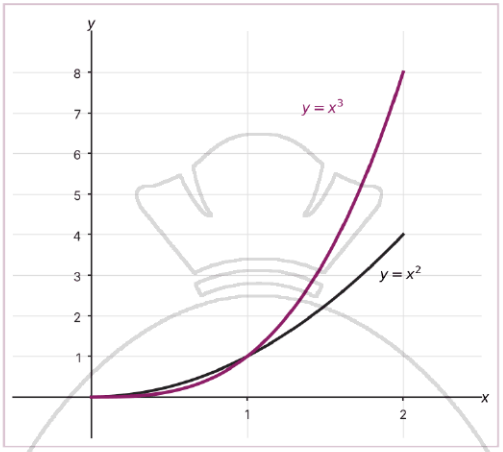
منحنی خط‌چین، نمودار $y = x^3$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹ صفحه ۱۴ کار در کلاس

۲) نمودار هر یک از توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ در فاصله‌ی $[0,2]$ رسم شده است. در فاصله‌ی $(0,1)$ نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله‌ی $[1,2]$ چطور؟

در فاصله‌ی $(0,1)$: $x^3 < x^2$ (مثلاً $0/5^3 = 0/125 < 0/25$)، پس نمودار $y = x^3$ پایین‌تر و نمودار $y = x^2$ بالاتر است. در $[1,2]$: $x^3 \geq x^2$، پس نمودار $y = x^3$ بالاتر است (در $x=1$ و $x=0$ برابرند).



۲۰ صفحه ۱۵ فعالیت

براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک است. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.

الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی رو به افزایش بوده است؟

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی رو به کاهش بوده است؟

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟

نمودار در دسترس نبود؛ پاسخ بر پایه‌ی شکل تقریبی فرض‌شده است:

- الف) رو به افزایش (نمودار رو به بالا): از روز ۱۸ تا ۲۰ و از روز ۲۴ تا ۲۷ دی.
- ب) رو به کاهش (نمودار رو به پایین): از روز ۱۶ تا ۱۸، از روز ۲۰ تا ۲۲ و از روز ۲۷ تا ۳۰ دی.
- پ) ثابت (نمودار افقی): از روز ۲۲ تا ۲۴ دی.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

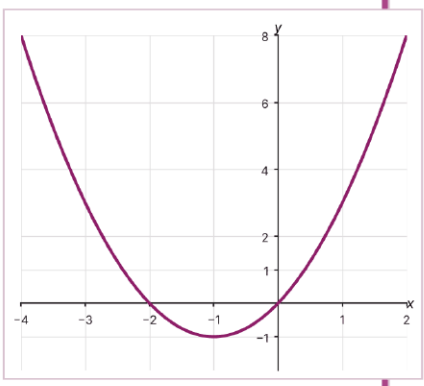
۲۱ صفحه ۱۷ کار در کلاس

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

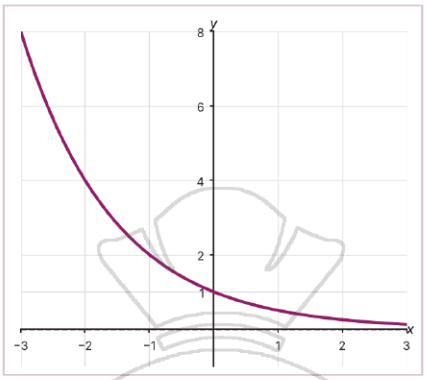
$f(x) = x^{۲} + ۲x$ ، $g(x) = ۲^{-x}$ ، $h(x) = |x + ۲|$

الف) در چه بازه‌هایی این توابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

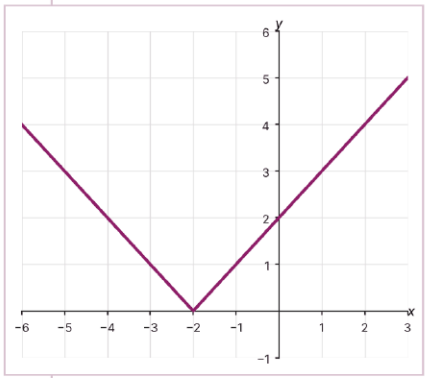
ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است؟



f



g



h

الف) f: سهمی با رأس (−۱,−۱)؛ اکیداً نزولی در $(-\infty, -۱]$ و اکیداً صعودی در $[-۱, +\infty)$.

g: اکیداً نزولی در R. h: اکیداً نزولی در $(-\infty, -۲]$ و اکیداً صعودی در $[-۲, +\infty)$.

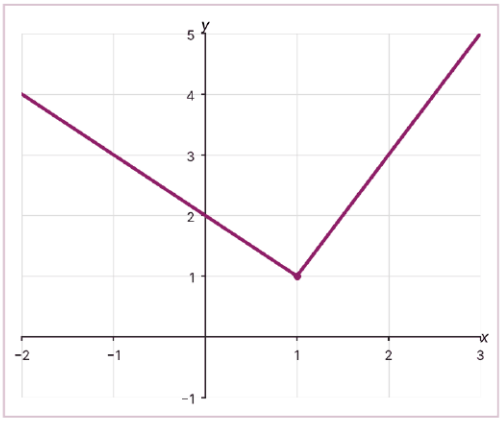
ب) فقط g در تمام دامنه‌اش اکیداً یکنواست (اکیداً نزولی)؛ f و h هر دو در رأس تغییر جهت می‌دهند.

۲۲ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۲) نمودار تابع $f(x) = ۲x - ۱ \ (x \geq ۱)$ ، $f(x) = ۲ - x \ (x < ۱)$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

ضابطه‌ی تابع (فرض‌شده): برای $x \geq ۱$ برابر $۲x - ۱$ و برای $x < ۱$ برابر $۲ - x$ است؛ در $x=۱$ هر دو ضابطه مقدار ۱ می‌دهند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



تابع در $(-\infty, 1]$ (اکیداً) نزولی و در $[1, +\infty)$ (اکیداً) صعودی است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۳ صفحه ۱۸ | کار در کلاس

۳) الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

الف) بله. اگر $a<b$ آنگاه $f(a) < f(b)$ و در نتیجه $f(a) \le f(b)$ ؛ پس شرط صعودی بودن برقرار است.

ب) خیر. مثلاً تابع ثابت $f(x) = 1$ صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست؛ یا تابعی که روی $[0,1]$ ثابت و بیرون آن اکیداً صعودی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۱۸ | کار در کلاس

۴) الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) \le f(b)$ ، نشان دهید که $a \le b$.

ب) اگر $\log(2x - 3) \le \log(x + 1)$ ، حدود x را به دست آورید.

الف) برهان خلف: فرض کنید $a>b$. چون f اکیداً صعودی است، $f(a) > f(b)$ که با فرض $f(a) \le f(b)$ تناقض دارد. پس $a \le b$.

ب) تابع لگاریتم (با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱) اکیداً صعودی است. شرط تعریف: $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ (و $x + 1 > 0$ خودبه‌خود برقرار است). طبق (الف):

$۲x - ۳ \le x + ۱ \Rightarrow x \le ۴$

پس $\frac{۳}{۲} < x \le ۴$ ، یعنی $x \in \left(\frac{۳}{۲}, ۴\right]$.

---

۲۵ صفحه ۱۸ **فعالیت**

چندجمله‌ای‌های $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ و $p(x) = x^۲ - ۲$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج‌قسمت و باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند، نشان دهید که $q(x) = x - ۳$ و $r(x) = ۲x - ۵$.

ب) درستی تساوی $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ را بررسی کنید.

الف) تقسیم: جمله‌ی اول خارج‌قسمت $x^۳ \div x^۲ = x$ ؛ $x(x^۲ - ۲) = x^۳ - ۲x$ و باقیمانده‌ی جزئی $-۳x^۲ + ۲x + ۱$. سپس $-۳x^۲ \div x^۲ = -۳$ ؛ $-۳(x^۲ - ۲) = -۳x^۲ + ۶$ و باقیمانده $۲x - ۵$. چون درجه‌ی $۲x - ۵$ از درجه‌ی p کمتر است، تقسیم پایان می‌یابد: $q(x) = x - ۳$ ، $r(x) = ۲x - ۵$.

ب) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = (x^۲ - ۲)(x - ۳) + ۲x - ۵ = x^۳ - ۳x^۲ - ۲x + ۶ + ۲x - ۵$ ✓

---

۲۶ صفحه ۱۹ **فعالیت**

در تقسیم $f(x) = x^۳ + ۲$ بر $p(x) = ۲x - ۱$ ، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج‌قسمت و باقیمانده‌اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه‌ی صفر است.

ب) با توجه به قضیه‌ی تقسیم می‌توان نوشت $f(x) = (۲x - ۱)q(x) + r(x)$. اکنون ریشه‌ی چندجمله‌ای $۲x - ۱$ را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه‌ی بالا نشان دهید که $r = f\left(\frac{۱}{۲}\right)$. به طور کلی می‌توان گفت: $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$ $(a \neq ۰)$.

الف) درجه‌ی باقیمانده باید از درجه‌ی مقسوم‌علیه (۱) کمتر باشد، پس $r(x)$ یا صفر است یا ثابت غیرصفر؛ یعنی از درجه‌ی صفر (عدد ثابت r) است.

ب) ریشه‌ی $۲x - ۱$ برابر $x = \frac{۱}{۲}$ است. با قرار دادن در $f(x) = (۲x - ۱)q(x) + r$: $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \cdot q\left(\frac{۱}{۲}\right) + r = r$. در این مثال $r = \frac{۱}{۸} + ۲ = \frac{۱۷}{۸}$. در حالت کلی ریشه‌ی $ax + b$ برابر $-\frac{b}{a}$ است و همین استدلال $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$ را می‌دهد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۱۹ — کار در کلاس

۱) باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^۳ + x - ۲$ را بر $۲x + ۱$ به دست آورید.

۲) اگر چندجمله‌ای $x^۲ + ax - ۲$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۱) ریشه‌ی $۲x + ۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است: $r = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳ - \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۲۱}{۸}$.

۲) باید باقیمانده صفر باشد: $f(a) = a^۲ + a \cdot a - ۲ = ۲a^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow a = \pm ۱$.

۲۸ صفحه ۱۹ — کار در کلاس

اگر $f(x) = x^۴ - ۱۶$ و $p(x) = x + ۲$، نشان دهید که f بر p بخش‌پذیر است.

ریشه‌ی p برابر -۲ است و $f(-۲) = (-۲)^۴ - ۱۶ = ۱۶ - ۱۶ = ۰$. پس باقیمانده صفر است و f بر p بخش‌پذیر است.

۲۹ صفحه ۲۰ — فعالیت

با اتحادهای $x^۲ - a^۲ = (x - a)(x + a)$ و $x^۳ - a^۳ = (x - a)(x^۲ + ax + a^۲)$ آشنا هستید.

۱) با تقسیم $x^۴ - a^۴$ بر $x - a$ نشان دهید که $x^۴ - a^۴ = (x - a)(x^۳ + ax^۲ + a^۲x + a^۳)$.

۲) آیا $x^n - a^n$ $(n \in N)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است؟

۳) از تقسیم $x^n - a^n$ بر $x - a$ نشان دهید که

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-۱} + ax^{n-۲} + a^۲x^{n-۳} + \cdots + a^{n-۲}x + a^{n-۱})$$

۴) چندجمله‌ای‌های $x^۵ - ۱$ و $x^۶ - ۶۴$ را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

۱) $(x - a)(x^۳ + ax^۲ + a^۲x + a^۳) = x^۴ + ax^۳ + a^۲x^۲ + a^۳x - ax^۳ - a^۲x^۲ - a^۳x - a^۴ = x^۴ - a^۴$.

(تقسیم $x^۴ - a^۴$ بر $x - a$ همین خارج‌قسمت و باقیمانده‌ی ۰ را می‌دهد.)

۲) بله؛ باقیمانده برابر $f(a) = a^n - a^n = ۰$ است.

irantooshe.ir

۳) در تقسیم، خارج‌قسمت جمله به جمله $x^{n-1}, ax^{n-2}, a^2x^{n-3}, \dots, a^{n-1}$ به دست می‌آید و باقیمانده صفر است؛ در ضرب $(x-a)$ در مجموع، جمله‌های میانی دو به دو حذف می‌شوند (تلسکوپی) و $x^n - a^n$ می‌ماند.

۴) $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

و بیشتر: $x^6 - 64 = x^6 - 2^6 = (x-2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$ ؛

$(x-2)(x+2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$.

---

۳۰ صفحه ۲۰ کار در کلاس

۱) در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد

$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$ **را نتیجه بگیرید. به کمک این اتحاد، چندجمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.**

۲) در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد

$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$ **را نتیجه بگیرید. به کمک این اتحاد، چندجمله‌ای $x^4 - 16$ را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.**

---

۱) برای n فرد $(-a)^n = -a^n$ و $(-a)^k = (-1)^k a^k$. پس $x^n - (-a)^n = x^n + a^n$ و عامل‌ها $x+a$ و $x^{n-1} + (-a)x^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$ می‌شوند (جمله‌ها با علامت یک‌درمیان و آخرین جمله $+a^{n-1}$).

$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

۲) برای n زوج $(-a)^n = a^n$ و جایگذاری $a \to -a$ در اتحاد قبلی، علامت جمله‌ی آخر $(-a)^{n-1} = -a^{n-1}$ می‌شود؛ بنابراین اتحاد گفته‌شده به دست می‌آید.

$x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) = (x+2)(x-2)(x^2 + 4)$

---

۳۱ صفحه ۲۱ تمرین

۱) تابع $f(x) = (x-2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

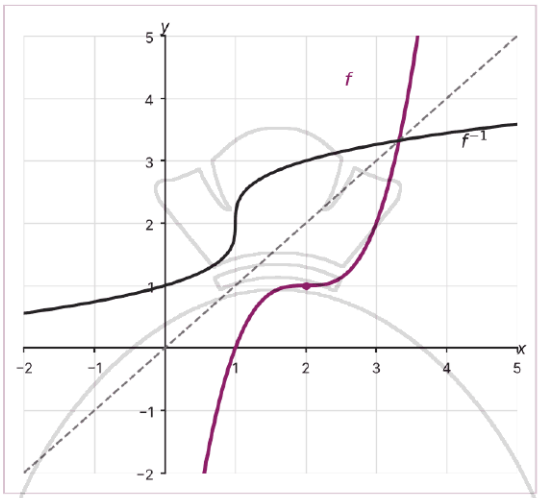
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید.

پ) ضابطه‌ی f^{-1} را به دست آورید.

الف) نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا می‌بریم (مرکز تقارن (۲,۱)).

ب) اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $(a-2)^3 = (b-2)^3$ و ریشه‌ی سوم یکتاست، پس $a = b$ ؛ f یک‌به‌یک (اکیداً صعودی) و وارون‌پذیر است. نمودار f^{-1} قرینه‌ی نمودار f نسبت به خط $y = x$ است.



پ) $y = (x-2)^3 + 1 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$.

۳۲ صفحه ۲۱ تمرین

۲) نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

نمودارها در دسترس نبودند؛ با توجه به اعداد روی محورها (۲- و ۲ برای f، ۳- و ۲ برای g) فرض می‌کنیم هر یک در میانه ثابت است:

- الف) f روی $(-\infty, -2]$ و $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است و روی کل R صعودی است (روی [۲,۲-] ثابت).
- ب) g روی $(-\infty, -3]$ و $[2, +\infty)$ اکیداً نزولی است و روی کل R نزولی است (روی [۳,۲-] ثابت).
- پ) h (با فرض تغییر جهت در مبدأ) روی $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

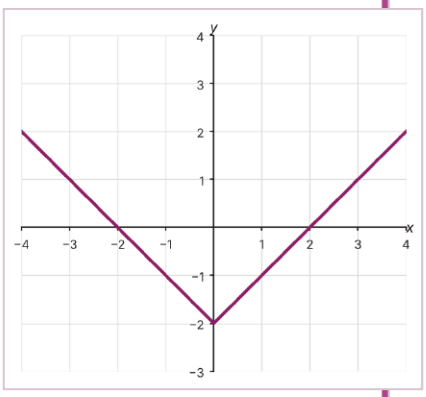
irantooshe.ir

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

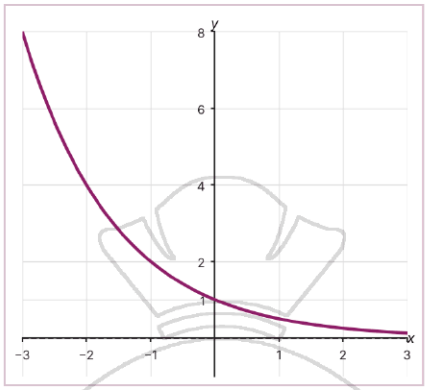
۳۳ صفحه ۲۱ تمرین

۳) نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

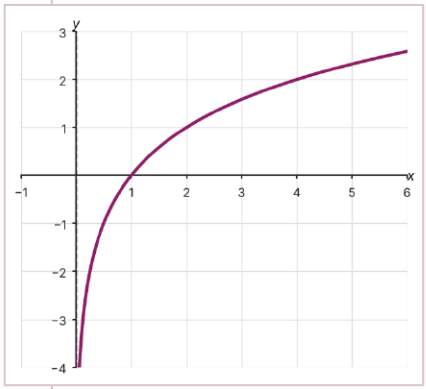
الف) $f(x) = |x| - ۲$ **ب)** $g(x) = ۲^{-x}$ **پ)** $h(x) = \log_{۲} x$



f



g



h

f روی $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی و روی $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است، پس در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست. g در R اکیداً نزولی و h در $(۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ پس g و h در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا هستند.

ضابطه‌ی f به‌دلیل خرابی متن حدس زده شده است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

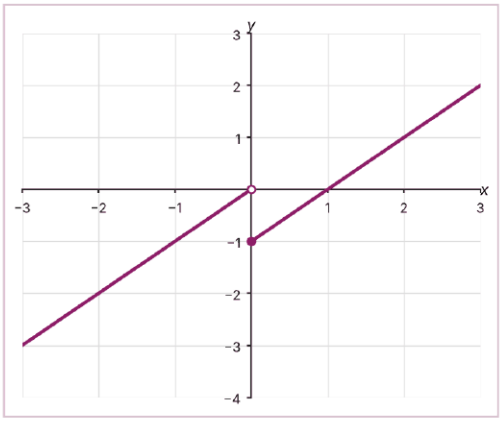
۳۴ صفحه ۲۲ تمرین

۴) الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد؟

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.

الف) بله؛ تابع ثابت، مثل $f(x) = c$ ، هم صعودی و هم نزولی است ($f(a) \le f(b)$ و $f(a) \ge f(b)$).

ب) تابع $f(x) = x \ (x < ۰)$ ، $f(x) = x - ۱ \ (x \ge ۰)$: روی هر بازه اکیداً صعودی است ولی $f(-۰/۱) = -۰/۱ > f(۰) = -۱$ با وجود $-۰/۱ < ۰$ ، پس در R اکیداً صعودی نیست.



۳۵ صفحه ۲۲ تمرین

۵) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟

اگر $a<b$ آنگاه $f(a)<f(b)$ و $g(a)<g(b)$؛ با جمع: $f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$، یعنی $(f+g)(a)<(f+g)(b)$.

درباره‌ی $f-g$ نمی‌توان نتیجه‌ی قطعی گرفت: برای $f(x)=۲x,\ g(x)=x$ تفاضل x صعودی است، اما برای $f(x)=x,\ g(x)=۲x$ تفاضل $-x$ نزولی است.

۳۶ صفحه ۲۲ تمرین

۶) اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $x^۳+kx^۲+۲$ بر $x-۲$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

$$f(۲)=۸+۴k+۲=۶\Rightarrow ۴k=-۴\Rightarrow k=-۱$$

۳۷ صفحه ۲۲ تمرین

۷) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳+ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

باید $f(۲)=۰$ و $f(-۱)=۰$ باشد:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$۸ + ۴a + ۲b + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۹$

$-۱ + a - b + ۱ = ۰ \Rightarrow a = b$

پس $۶a = -۹$ و $a = b = -\frac{۳}{۲}$.

---

۳۸ صفحه ۲۲ تمرین

۸) هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته‌شده تجزیه کنید.

الف) $x^۶ - ۱$ **با عامل** $x - ۱$

ب) $x^۶ - ۱$ **با عامل** $x + ۱$

پ) $x^۵ + ۳۲$ **با عامل** $x + ۲$

الف) $x^۶ - ۱ = (x - ۱)(x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱)$

ب) $n=۶$ زوج است: $x^۶ - ۱ = (x + ۱)(x^۵ - x^۴ + x^۳ - x^۲ + x - ۱)$

پ) $n=۵$ فرد است: $x^۵ + ۳۲ = x^۵ + ۲^۵ = (x + ۲)(x^۴ - ۲x^۳ + ۴x^۲ - ۸x + ۱۶)$

---

۳۹ صفحه ۲۲ تمرین

۹) الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \le f(b)$ ،

نشان دهید که $a \ge b$.

ب) اگر $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x-۱۱} \ge ۳۲$ ، **حدود x را به دست آورید.**

الف) برهان خلف: اگر $a<b$، چون f اکیداً نزولی است $f(a) > f(b)$ که با فرض تناقض دارد. پس $a \ge b$.

ب) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۵} = ۳۲$ ؛ طبق (الف): $x - ۱۱ \le -۵ \Rightarrow x \le ۶$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت