با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام هندسه (۳) دوازدهم

پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی و تمرین‌های کتاب

پایه دوازدهم · رشته ریاضی و فیزیک

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس و تمرین‌های کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — ماتریس و کاربردها ۴

۲ فصل دوم — آشنایی با مقاطع مخروطی ۲۲

۳ فصل سوم — بردارها ۵۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه (۳) دوازدهم - فصل اول

ماتریس و کاربردها

فهرست

۱	صفحه ۱۱ · کار در کلاس — نمایش اطلاعات فروشگاه‌ها با ماتریس	۸
۲	صفحه ۱۴ · کار در کلاس — جمع و تفریق ماتریس‌ها	۸
۳	صفحه ۱۵ · کار در کلاس — ضرب عدد در ماتریس	۹
۴	صفحه ۱۷ · کار در کلاس — بررسی خاصیت (ج) و اثبات آن	۹
۵	صفحه ۱۷ · کار در کلاس — تعریف ماتریس‌های سطری و ستونی با حاصل‌ضرب ۷-	۱۰
۶	صفحه ۱۸ · پرسش درون متن — امکان‌پذیر بودن ضرب B×A	۱۰
۷	صفحه ۱۸ · کار در کلاس — محاسبه‌ی A×B و B×A	۱۰
۸	صفحه ۱۹ · کار در کلاس — خواص ضرب ماتریس‌ها: جابه‌جایی و عضو خنثی	۱۱
۹	صفحه ۱۹ · کار در کلاس — خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع	۱۱
۱۰	صفحه ۲۰ · کار در کلاس — خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها	۱۱
۱۱	صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۱	۱۲
۱۲	صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۲	۱۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۳ ۱۲

۱۴ صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۴ ۱۲

۱۵ صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۵ ۱۳

۱۶ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۶ ۱۳

۱۷ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۷ ۱۳

۱۸ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۸ ۱۳

۱۹ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۹ ۱۴

۲۰ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۱۰ ۱۴

۲۱ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۱۱ ۱۴

۲۲ صفحه ۲۲ · مسئله — نشان دادن وارون بودن دو ماتریس ۱۴

۲۳ صفحه ۲۳ · مثال — امتحان پاسخ وارون ماتریس ۱۵

۲۴ صفحه ۲۳ · پرسش کنار صفحه — آیا دو ماتریس وارون یکدیگرند؟ ۱۵

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۵ صفحه ۲۳ · پرسش کنار صفحه — وارونِ وارون ماتریس ۱۵

۲۶ صفحه ۲۴ · فعالیت — حل دستگاه با ماتریس وارون ۱۵

۲۷ صفحه ۲۵ · مثال (تکمیلی) — حل دستگاه با ماتریس وارون ۱۶

۲۸ صفحه ۲۵ · پرسش کنار صفحه — دستگاه با دترمینان صفر ۱۶

۲۹ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — بررسی دستگاه $2x-3y=3$ و $4x+6y=-1$ ۱۶

۳۰ صفحه ۲۸ · پرسش کنار صفحه — دترمینان ماتریسی با درایه‌های دترمینان ۱۷

۳۱ صفحه ۲۹ · پرسش کنار صفحه — معادله‌ی $|A|^2-5|A|+6=0$ ۱۷

۳۲ صفحه ۲۹ · کار در کلاس — دترمینان حاصل‌ضرب، توان و ماتریس قطری ۱۷

۳۳ صفحه ۳۰ · پرسش کنار صفحه — دترمینان ماتریس اسکالر با $a_{11}=4$ ۱۸

۳۴ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۱ ۱۸

۳۵ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۲ ۱۹

۳۶ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۳ ۱۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۴ ..... ۱۹

۳۸ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۵ ..... ۱۹

۳۹ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۶ ..... ۱۹

۴۰ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۷ ..... ۲۰

۴۱ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۸ ..... ۲۰

۴۲ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۹ ..... ۲۰

۴۳ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۰ ..... ۲۰

۴۴ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۱ ..... ۲۱

۴۵ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۲ ..... ۲۱

۴۶ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۳ ..... ۲۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۱۱ کار در کلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است. این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A: ۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن

فروشگاه B: ۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن

فروشگاه C: ۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن

فروشگاه D: ۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

اگر هر سطر را به یک فروشگاه (به ترتیب A، B، C، D) و هر ستون را به یک نوع لباس (به ترتیب شلوار، بلوز، پیراهن) اختصاص دهیم، ماتریس ۴×۳ به‌دست می‌آید:

اگر هر سطر را به یک نوع لباس و هر ستون را به یک فروشگاه اختصاص دهیم، ماتریس ۳×۴ (ترانهاده‌ی ماتریس بالا) به‌دست می‌آید:

۲ صفحه ۱۴ کار در کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

الف)

ب)

پ)

ت)

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

الف) دو ماتریس هم‌مرتبه‌اند (۲×۲)؛ درایه‌های نظیر را از هم کم می‌کنیم:

ب) هر دو ماتریس سطری ۱×۴ هستند و درایه‌های نظیر را جمع می‌کنیم:

پ) هر دو ماتریس ۲×۴ هستند:

ت) هر دو ماتریس ۱×۱ هستند: (یعنی عدد ۲-).

ث) کافی است ماتریس دوم را قرینه‌ی ماتریس اول بگیریم؛ مثلاً:

۳ صفحه ۱۵ **کار در کلاس**

۱ـ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف)

ب)

پ)

ت)

۲ـ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

۱ـ الف)

ب)

پ) ضرب عدد صفر در هر ماتریس، ماتریس صفر هم‌مرتبه با آن را نتیجه می‌دهد:

ت)

۲ـ از هر درایه‌ی ماتریس اول عامل مشترک ۲ و از هر درایه‌ی ماتریس دوم عامل مشترک (۱−) بیرون می‌آوریم:

۴ صفحه ۱۷ **کار در کلاس**

۱ـ برای ماتریس و دو عدد حقیقی $r = ۳$ و $s = -۲$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲ـ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

خاصیت (ج):

۱ـ داریم پس:

از طرفی:

پس . همچنین و .

۲ـ فرض کنیم و . آنگاه:

(تعریف ضرب عدد در ماتریس)

(توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق در)

(تعریف جمع و تفریق ماتریس‌ها)

(تعریف ضرب عدد در ماتریس)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ صفحه ۱۷ کار در کلاس

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که A×B=−۷.

ماتریس سطری ۱×۳ و ماتریس ستونی ۳×۱ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم (مرتبه‌ی ماتریس‌ها طبق صورت پرسش، سطری با سه ستون و ستونی با سه سطر است):

پاسخ یکتا نیست؛ هر دو ماتریسی که مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های نظیرشان ۷- شود پذیرفته است.

۶ صفحه ۱۸ پرسش درون متن

مثال: اگر آیا ضرب (B×A) امکان‌پذیر است؟ چرا؟

خیر. برای تعریف حاصل‌ضرب B×A باید تعداد ستون‌های B با تعداد سطرهای A برابر باشد. اما B ماتریسی ۳×۲ است و تعداد ستون‌هایش ۲ است، در حالی که A ماتریسی ۳×۳ است و ۳ سطر دارد. چون ۲ ≠ ۳، ضرب B×A تعریف‌شده نیست. (ولی A×B چون ستون‌های A برابر ۳ و سطرهای B برابر ۳ است، تعریف می‌شود.)

۷ صفحه ۱۸ کار در کلاس

۱ـ برای هر حالت A×B و B×A را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف)

ب)

پ)

ت)

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی که «اگر a×b = ۰ آنگاه a = ۰ یا b = ۰» مقایسه کنید.

۲ـ اگر A ماتریسی ۵×۳ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که A×B و B×A قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه‌ی آن را بیابید:

الف) B=[b_ij]_۳×۲ ب) B=[b_ij]_۵×۳ پ) B=[b_ij]_۵×۳ ت) B=[b_ij]_۵×۴ ث) B=[b_ij]_۵×۵

۱ـ الف) A از مرتبه‌ی ۳×۳ و B از مرتبه‌ی ۳×۴ است. A×B تعریف می‌شود و ۳×۴ است؛ B×A تعریف نمی‌شود (ستون‌های B: ۴، سطرهای A: ۳).

ب) A از مرتبه‌ی ۳×۲ و B از مرتبه‌ی ۲×۳ است؛ هر دو حاصل‌ضرب تعریف می‌شوند (A×B از مرتبه‌ی ۳×۳ و B×A از مرتبه‌ی ۲×۲):

پ) A از مرتبه‌ی ۳×۱ و B از مرتبه‌ی ۱×۳ است؛ A×B ماتریسی ۳×۳ و B×A ماتریسی ۱×۱ است:

ت) A از مرتبه‌ی ۲×۳ و B از مرتبه‌ی ۳×۳ است؛ A×B ماتریسی ۲×۳ است (B×A تعریف نمی‌شود):

ایران توشه
توشه‌ای برای فردا

در اینجا و ولی . یعنی در ضرب ماتریس‌ها از نمی‌توان نتیجه گرفت که یا ؛ در حالی که در اعداد حقیقی از ۰ = a×b حتماً ۰ = a یا ۰ = b نتیجه می‌شود.

۲ـ A×B وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A (۳) با تعداد سطرهای B برابر باشد و B×A وقتی که تعداد ستون‌های B با تعداد سطرهای A (۵) برابر باشد.

حالت	A×B	B×A
الف) ۳×۲	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۵×۲	تعریف نمی‌شود
ب) ۳×۵	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۵×۵	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۳×۳
پ) ۵×۳	تعریف نمی‌شود	تعریف نمی‌شود
ت) ۵×۴	تعریف نمی‌شود	تعریف نمی‌شود
ث) ۵×۵	تعریف نمی‌شود	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۵×۳

۸ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۱ـ فرض کنید در این صورت حاصل (A×B) و (B×A) را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه: در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

۲ـ ماتریس اسکالر را از چپ و راست در ماتریس ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مشاهده می‌کنیم A×B ≠ B×A. بنابراین: **در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.**

۲ـ

هر دو حاصل‌ضرب برابر A است: . پس ماتریس واحد در ضرب ماتریس‌ها نقش عضو خنثی را دارد (و در این حالت خاص جابه‌جایی برقرار است).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۳ـ اگر و در این صورت درستی تساوی A×(B+C)=(A×B)+(A×C) را بررسی کنید.

دو طرف تساوی با هم برابرند؛ پس تساوی A×(B+C)=(A×B)+(A×C) درست است.

۱۰ صفحه ۲۰ **کار در کلاس**

۴ـ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره‌ی (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

هر دو طرف برابرند؛ پس $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ برقرار است.

۱۱ صفحه ۲۰ تمرین

۱ـ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^{۲}$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

طبق شکل پرسش، ماتریس دارای ۳ سطر و ۴ ستون است (). درایه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

۱۲ صفحه ۲۰ تمرین

۲ـ اگر $A=B$ و در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

دو ماتریس برابرند اگر درایه‌های نظیرشان برابر باشند:

با جمع دو معادله‌ی اول: و سپس . (درایه‌ی ۵ در A با $۲x+y$ در B و ۱ با ۱ تطبیق می‌کند.)

بنابراین .

۱۳ صفحه ۲۰ تمرین

۳ـ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq O$ و $B\neq O$ ولی $AB=O$.

هر دو ماتریس غیرصفرند ولی حاصل‌ضربشان ماتریس صفر است.

۱۴ صفحه ۲۰ تمرین

۴ـ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

مثال نقض:

پس $AB=AC$ ولی $B\neq C$ (و حتی $A\neq O$). بنابراین قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ صفحه ۲۰ تمرین

۵ـ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{(n-1)}$ $(n\in\mathbb{N}\ ,\ n>1)$ در این صورت با فرض حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

چون ، داریم :

(توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد برابر A هستند.)

۱۶ صفحه ۲۱ تمرین

۶ـ اگر مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب A×B ماتریسی قطری باشد.

ماتریس قطری باید درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی‌اش صفر باشد:

،

در این صورت که قطری است.

۱۷ صفحه ۲۱ تمرین

۷ـ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس A×B و B×A را به‌دست آورید.

ماتریس A (۲×۳):

ماتریس B (۳×۲):

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۲۱ تمرین

۸ـ اگر ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس (A×B) را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فرض می‌کنیم . آنگاه:

نتیجه: ضرب ماتریس قطری A از سمت چپ در ماتریس B، هر سطر B را در درایه‌ی نظیر قطر A ضرب می‌کند (سطر i ام B در r_i).

۱۹ صفحه ۲۱ تمرین

۹ـ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبه‌ی A در این صورت

الف) برای A×B و B×A قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی A×B=B×A برقرار است؟

الف) ماتریس اسکالر یعنی قطری با درایه‌های روی قطر برابر؛ پس . طبق تمرین قبل (و طبق ویژگی عضو خنثی):

.،

یعنی هر دو حاصل‌ضرب برابر است با ماتریسی که از ضرب عدد k در همه‌ی درایه‌های B به‌دست می‌آید.

ب) بله؛ چون هر دو برابر kB هستند، تساوی A×B=B×A برقرار است.

۲۰ صفحه ۲۱ تمرین

۱۰ـ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند (A×B=B×A) ثابت کنید.

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

الف) با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری:

چون پس و در نتیجه .

ب)

چون پس و در نتیجه .

۲۱ صفحه ۲۱ تمرین

۱۱ـ اگر مفروض باشد. حاصل A^3 را بدست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه: برای ماتریس قطری، توان nام ماتریس برابر است با ماتریس قطری که درایه‌های قطر آن توان nام درایه‌های قطر ماتریس اصلی است.

۲۲ صفحه ۲۲ مسئله

مسئله: نشان دهید ماتریس وارون ماتریس است. کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم AB=BA=I.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

چون $AB=BA=I$، ماتریس B وارون ماتریس A است.

۲۳ صفحه ۲۳ **مثال**

مثال: وارون ماتریس را به‌دست آورید. ... پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.

وارون را به‌دست آورده بودیم. امتحان: باید $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I$ باشد.

پس پاسخ درست است.

۲۴ صفحه ۲۳ **پرسش کنار صفحه**

آیا دو ماتریس و وارون یکدیگرند؟ چرا؟

چون $A\times B\neq I$، این دو ماتریس وارون یکدیگر نیستند. (وارون A برابر است با زیرا .)

۲۵ صفحه ۲۳ **پرسش کنار صفحه**

اگر مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پس

اکنون وارون A^{-1}: و

نتیجه: یعنی وارونِ وارونِ هر ماتریس وارون‌پذیر، خودِ آن ماتریس است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۲۴ **فعالیت**

دستگاه $7x + 4y = 15$ ، $2x + y = 4$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

(۱)

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم: (۲)

از (۱) و (۲) ⇒ . معادله‌ی ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱ـ حال اگر فرض کنیم A () را ماتریس ضرایب می‌نامیم در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی A^{-1} را بیابید.

۲ـ معادله‌ی ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

تکمیل (۱):

۱ـ $\Rightarrow$ A وارون‌پذیر است.

۲ـ دو طرف را از چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$\Rightarrow$

تحقیق: و .

---

۲۷ صفحه ۲۵ مثال (تکمیلی)

مثال: دستگاه $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

،

پس . (تحقیق: و)

---

۲۸ صفحه ۲۵ پرسش کنار صفحه

دستگاه معادلات $\begin{cases} -4x + 2y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟ این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

ماتریس ضرایب است و . پس A وارون‌پذیر نیست و نمی‌توان از ماتریس وارون استفاده کرد.

هر دو خط شیب ۲ دارند (و) ولی عرض از مبدأهایشان متفاوت است ()؛ بنابراین دو خط موازی و متمایزند، نقطه‌ی مشترکی ندارند و دستگاه جواب ندارد.

---

۲۹ صفحه ۲۶ کار در کلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} -4x + 6y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱ـ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ـ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ـ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $x - 3y = 2$ ، $-3x + 9y = -6$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A| = 0$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

۱ـ $\Rightarrow$ شیب ؛ $\Rightarrow$ شیب

شیب‌ها برابرند ولی عرض از مبدأها (و) متفاوتند؛ پس دو خط موازی‌اند و بر هم منطبق نیستند و دستگاه جواب ندارد.

۲ـ

چون ماتریس A وارون‌پذیر نیست (وارون ندارد).

۳ـ در دستگاه : و (معادله‌ی دوم برابر ۳- ضرب معادله‌ی اول است). پس شیب‌ها و عرض از مبدأها برابر است و دو خط بر هم منطبقند؛ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. ماتریس ضرایب با وارون‌پذیر نیست.

نتیجه‌ی کلی: اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه ۲×۲ باشد و $|A|=0$، آنگاه دو خط موازی‌اند و دستگاه یا جواب ندارد (دو خط موازی و متمایز، مانند حالت ۱) یا بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق، مانند حالت ۳).

۳۰ صفحه ۲۸ **پرسش کنار صفحه**

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

ابتدا دترمینان‌های ۲×۲ را حساب می‌کنیم: ، ، (با علامت منفی $\Rightarrow$ ۱-)،

۳۱ صفحه ۲۹ **پرسش کنار صفحه**

اگر در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2 - 50|A| + 600 = 0$ برقرار باشد.

.

پس کافی است ad-bc برابر ۲ یا ۳ باشد؛ مثلاً

یا . (جواب‌ها بی‌شمارند.)

۳۲ صفحه ۲۹ **کار در کلاس**

۱ـ ماتریس‌های مفروض‌اند. ماتریس A×B را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

۲ـ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A| = -6$، سپس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ـ اگر در این صورت |A| را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه: ۱ـ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ..... ۲ـ دترمینان ماتریس مربعی صفر، ..... است.

۴ـ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم در این صورت |A| را به دست آورید.

۱ـ

. ، ،

چون ، تساوی برقرار است.

۲ـ مثلاً ماتریس قطری که :

نتیجه: یعنی (که از با B=A نیز نتیجه می‌شود).

۳ـ برحسب سطر اول: . دستور ساروس نیز می‌دهد؛ برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

نتیجه: ۱ـ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با **حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی**. ۲ـ دترمینان ماتریس مربعی صفر، **صفر** است (زیرا تمام درایه‌های آن صفرند).

۴ـ

ماتریس A قطری است؛ پس . (راه دیگر:)

---

۳۳ صفحه ۳۰ پرسش کنار صفحه

اگر A ماتریسی ۳ × ۳ و اسکالر باشد و $a_{11} = ۴$ در این صورت |A| را بیابید.

ماتریس اسکالر، قطری با درایه‌های برابر روی قطر است؛ پس و .

---

۳۴ صفحه ۳۰ تمرین

۱ـ اگر و در این صورت |AB| و |BA| را به‌دست آورید.

سطرهای این ماتریس ۳×۳ همگی مضربی از سطر ۳- ۱۲ هستند (سطر اول در ۲- و سطر دوم در ۱- و سطر سوم در ۳)؛ پس دترمینان آن صفر است. با ساروس نیز: .

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ صفحه ۳۰ تمرین

۲ـ اگر در این صورت $|A^2|$ را به‌دست آورید.

با بسط برحسب سطر اول (یا ستون سوم):

چون ، داریم .

(با محاسبه‌ی مستقیم:)

۳۶ صفحه ۳۰ تمرین

۳ـ اگر در این صورت حاصل را بیابید.

برای سادگی می‌نامیم. دترمینان ماتریس داده‌شده را از قاعده‌ی می‌نویسیم:

پس یا . اگر باشد (حالت ساده و محتمل مورد نظر) آنگاه .

اگر باشد و .

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۷ صفحه ۳۰ تمرین

۴ـ دترمینان ماتریس را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه: اگر دو سطر یک ماتریس ۳×۳ برابر باشند، دترمینان آن صفر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ صفحه ۳۰ تمرین

۵ـ ماتریسی ۳ × ۳ چون A بیابید که $|A|=3$.

مثلاً ماتریس قطری

. پاسخ یکتا نیست؛ هر ماتریس دیگری با دترمینان ۳ نیز پذیرفته است، مثلاً که با بسط برحسب ستون سوم .

۳۹ صفحه ۳۱ تمرین

۶ـ اگر و حاصل عبارت $(2A^{-1}-3B^{-1})$ را بیابید.

هر درایه را جداگانه حساب می‌کنیم: ، ، ، .

۴۰ صفحه ۳۱ تمرین

۷ـ اگر ابتدا ماتریس A^{-1} را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

نتیجه: (دترمینان وارون یک ماتریس، وارون دترمینان آن است).

۴۱ صفحه ۳۱ تمرین

۸ـ الف) ماتریس‌های و را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس و بررسی کنید.

الف) طبق ساروس:

نتیجه: اگر همه‌ی درایه‌های یک سطر را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان k برابر می‌شود.

ب) ، . همان نتیجه برقرار است.

۴۲ صفحه ۳۱ تمرین

۹ـ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فرض کنیم ؛ آنگاه و

نتیجه: برای ماتریس ۲×۲، با ضرب عدد K در همه‌ی درایه‌های ماتریس، دترمینان در K^2 ضرب می‌شود. (هر سطر یک عامل K می‌دهد.)

۴۳ صفحه ۳۱ تمرین

۱۰ـ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و $|A| = ۵$ در این صورت حاصل $|A|\ A|$ را بیابید.

$|A|=۵$ عددی ثابت است؛ پس $|A|A$ یعنی ضرب عدد ۵ در ماتریس A، یعنی ۵A. در ماتریس ۳×۳ ضرب عدد در همه‌ی درایه‌ها، دترمینان را در ضرب می‌کند (هر یک از سه سطر یک عامل ۵ دارد):

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۴ صفحه ۳۱ تمرین

۱۱ـ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که ماتریس ضرایب دستگاه بوده و ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

دستگاه با شرط :

$\Rightarrow$

،

پس . (تحقیق: و)

۴۵ صفحه ۳۱ تمرین

۱۲ـ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $kx + 3y = 4$ ، $x - 2y = 3$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس ضرایب ناصفر باشد:

پس به ازای هر عدد حقیقی k به جز دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

۴۶ صفحه ۳۱ تمرین

۱۳ـ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $2x + y = 8$ ، $3x - 5y = -1$

ب) $-2x - 6y = 1$ ، $x + 3y = 5$

پ) $4x - 6y = -4$ ، $2x + 3y = 2$

الف)

دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد:

یعنی (تحقیق: و).

ب)

ماتریس وارون‌پذیر نیست. چون دو خط موازی و متمایزند؛ دستگاه **جواب ندارد**.

پ)

ماتریس وارون‌پذیر نیست. چون دو خط بر هم منطبقند؛ دستگاه **بی‌شمار جواب** دارد (مثلاً با ؛).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه (۳) دوازدهم - فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

فهرست

۴۷ صفحه ۳۴ · پرسش — فصل مشترک صفحه و کره ۲۶

۴۸ صفحه ۳۵ · پرسش — فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی در یک نقطه ۲۶

۴۹ صفحه ۳۶ · فعالیت — فعالیت ۱ - نیمساز زاویه ۲۶

۵۰ صفحه ۳۷ · فعالیت — فعالیت ۲ - دایره به عنوان مکان هندسی ۲۷

۵۱ صفحه ۳۷ · فعالیت — فعالیت ۳ - مکان هندسی نقاط هم‌فاصله از یک خط ۲۷

۵۲ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۱ - مکان هندسی ۲۸

۵۳ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۲ ۲۹

۵۴ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۳ ۲۹

۵۵ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۴ ۲۹

۵۶ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۵ ۳۰

۵۷ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۶ - مقطع سطح استوانه‌ای ۳۰

۵۸ صفحه ۴۱ · فعالیت — فعالیت ۱ - معادله‌ی ضمنی دایره ۳۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ صفحه ۴۲ · پرسش — چرا؟ - حالت‌های معادله‌ی ضمنی ۳۱

۶۰ صفحه ۴۲ · کار در کلاس — کار در کلاس - معادله‌ی دایره ۳۱

۶۱ صفحه ۴۳ · فعالیت — فعالیت ۲ - دایره‌ی مماس بر خط ۳۲

۶۲ صفحه ۴۳ · کار در کلاس — کار در کلاس - وتر مشخص ۳۲

۶۳ صفحه ۴۴ · فعالیت — فعالیت ۳ - دایره‌ی مماس داخل ۳۳

۶۴ صفحه ۴۴ · کار در کلاس — کار در کلاس - وضعیت دو دایره ۳۳

۶۵ صفحه ۴۵ · فعالیت — فعالیت ۴ - وضعیت خط و دایره ۳۴

۶۶ صفحه ۴۵ · سؤال — سؤال - علامت Δ ۳۴

۶۷ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۱ - نوشتن معادله‌ی دایره ۳۵

۶۸ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۲ ۳۵

۶۹ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۳ ۳۵

۷۰ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۴ - وضعیت دو دایره ۳۶

۷۱ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۵ - دایره‌ی محیطی مثلث ۳۶

۷۲ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۶ - وضعیت خط و دایره ۳۷

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷۳ صفحه ۴۷ · فعالیت — فعالیت ۱ – تعریف بیضی ۳۷

۷۴ صفحه ۴۸ · فعالیت — فعالیت ۲ – قطرها و کانون‌های بیضی ۳۸

۷۵ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — کار در کلاس – مختصات نقطه‌ی D ۳۹

۷۶ صفحه ۴۹ · فعالیت — فعالیت ۳ – کشیدگی بیضی ۳۹

۷۷ صفحه ۴۹ · پرسش — چرا؟ – c/a = 1 و c/a = 0 ۴۰

۷۸ صفحه ۵۰ · فعالیت — فعالیت ۴ – مماس بر بیضی و بازتاب ۴۰

۷۹ صفحه ۵۰ · فعالیت — فعالیت ۵ – نقاط هم‌فاصله از خط و نقطه ۴۱

۸۰ صفحه ۵۰ · فعالیت — ادامه‌ی فعالیت ۵ – ابزار گونیا و نخ ۴۱

۸۱ صفحه ۵۱ · فعالیت — فعالیت ۶ – معادله‌ی سهمی ۴۲

۸۲ صفحه ۵۳ · پرسش — چرا؟ – مثال سهمی با رأس A(2,1) و کانون F(2,5) ۴۳

۸۳ صفحه ۵۴ · پرسش — چرا؟ – مثال سهمی با رأس A(4,6) و خط هادی x=9 ۴۳

۸۴ صفحه ۵۵ · پرسش — چرا؟ – نقاط B و B′ بر سهمی ۴۴

۸۵ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۱ – کانون‌ها و نقاط بیضی ۴۴

۸۶ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۲ – دایره‌ی کمکی ۴۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۷ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۳ – مماس و خط موازی ۴۵

۸۸ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۴ – نقطه‌ای روی بیضی ۴۵

۸۹ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۵ – زاویه‌ی FBF′ ۴۵

۹۰ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۶ – نسبت AD/AF ۴۶

۹۱ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۷ ..... ۴۶

۹۲ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۸ ..... ۴۶

۹۳ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۹ ..... ۴۷

۹۴ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۰ ..... ۴۷

۹۵ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۱ ..... ۴۷

۹۶ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۲ ..... ۴۸

۹۷ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۳ – دیش ماهواره‌ای ۴۸

۹۸ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۴ – رسم مثلث با خواص بیضی ۴۸

۹۹ صفحه ۵۹ · تمرین — تمرین ۱۵ – وسط وترهای موازی سهمی ۴۹

ایران توشه
مرجع فایل برای موفقیت

۴۷ صفحه ۳۴ پرسش

به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می‌تواند باشد؟

فرض کنیم کره‌ای به مرکز O و شعاع R و صفحه‌ای به فاصله‌ی h از O داشته باشیم. سه حالت پیش می‌آید:

- اگر h<R باشد، فصل مشترک یک **دایره** است که مرکز آن پای عمود وارد از O بر صفحه و شعاعش است.
- اگر h=R باشد (صفحه بر کره مماس است)، فصل مشترک فقط **یک نقطه** است.
- اگر h>R باشد، صفحه و کره نقطه‌ی مشترکی ندارند و فصل مشترک تهی است.

پس شکل معمول فصل مشترک یک صفحه و یک کره، دایره است.

۴۸ صفحه ۳۵ پرسش

در چه حالتی فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی تنها نقطه‌ی A خواهد بود؟

هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس A عبور کند، فصل مشترک فقط خود نقطه‌ی A است؛ زیرا هر صفحه‌ی عمود بر محور، سطح مخروطی را در یک دایره قطع می‌کند و هرچه صفحه به رأس نزدیک‌تر شود شعاع این دایره کوچک‌تر می‌شود تا وقتی که صفحه از رأس بگذرد و شعاع صفر شود.

(به‌طور کلی هر صفحه‌ی گذرا از رأس که هیچ مولدی را در بر نداشته باشد و زاویه‌اش با محور از زاویه‌ی مولد با محور بزرگ‌تر باشد نیز سطح مخروطی را فقط در A قطع می‌کند.)

۴۹ صفحه ۳۶ فعالیت

۱ـ در کتاب هندسه‌ی ۱ با ویژگی‌ها و طریقه‌ی رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه‌ی مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

۱ـ هر نقطه روی نیمساز زاویه .....

۲ـ هر نقطه که ..... روی نیمساز زاویه است.

اکنون گزاره‌ی زیر را کامل کنید: یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر از ..... $M \in Oz$ $(\hat{O}_1=\hat{O}_2)$ ⇔ .....

بنابراین می‌توان گفت: نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

1. هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
2. هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه است.

گزاره‌ی کامل‌شده: یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر از **دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.**

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$M \in Oz \Leftrightarrow MH=MH'$ $(\hat{O}_1=\hat{O}_2)$ (یعنی فاصله‌ی M از Ox برابر فاصله‌ی M از Oy است).

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله‌اند.

---

۵۰ صفحه ۳۷ فعالیت

دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطه‌ی دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟

ب) اگر B، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله‌ی r باشد (OB=r) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید: $A \in C \Leftrightarrow OA=r$

نتیجه: نقطه‌ی A روی دایره‌ی C(O,r) است، اگر و فقط اگر .....

نتیجه: دایره‌ی C(O,r) مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

الف) طبق تعریف دایره، همه‌ی نقاط آن از مرکز به یک فاصله‌ی ثابت یعنی شعاع‌اند؛ پس OA=r.

ب) فرض می‌کنیم OB=r ولی B روی دایره نیست. نیم‌خط OB دایره را در نقطه‌ای مانند B' قطع می‌کند و طبق (الف) $OB'=r$. چون B و B' هر دو روی یک نیم‌خط به مبدأ O هستند و $B \neq B'$ ، فاصله‌ی آن‌ها از O نمی‌تواند برابر باشد؛ یعنی $OB \neq OB'=r$ که با فرض OB=r تناقض دارد. پس B همان B' و روی دایره است.

از (الف) و (ب): $A \in C \Rightarrow OA=r$ و $OA=r \Rightarrow A \in C$ ، یعنی $A \in C \Leftrightarrow OA=r$.

نقطه‌ی A روی دایره‌ی C(O,r) است، اگر و فقط اگر فاصله‌ی A از O برابر r باشد (OA=r).

دایره‌ی C(O,r) مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی r قرار دارند.

---

۵۱ صفحه ۳۷ فعالیت

دو خط موازی d و d' را که فاصله‌ی آن‌ها از هم ۲ سانتی‌متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d'، از خط d فاصله‌ی یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند و روی d' نباشند؟ همه‌ی نقاطی که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

آیا گزاره‌ی زیر درست است؟ «یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.»

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشد.»

بله. اگر AH و BH' عمودهای وارد از A و B بر d باشند، چون $d \parallel d'$ ، چهارضلعی $AHH'B$ مستطیل است و $AH=BH'$؛ پس همه‌ی نقاط d' از d به یک فاصله‌اند و این فاصله ۲ سانتی‌متر است.

بله، همه‌ی نقاط خط d'' که در طرف دیگر d و موازی با آن، به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از d است نیز چنین‌اند و روی d' نیستند. بنابراین نقاطی که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر قرار دارند روی **دو خط موازی با d** (در دو طرف آن) قرار می‌گیرند.

گزاره‌ی دوم درست است: هر نقطه‌ی روی d' یا d'' فاصله‌اش از d برابر ۲ است، و برعکس نقطه‌ای که فاصله‌اش از d برابر ۲ باشد، در یکی از دو طرف d است و روی خط موازی d در همان طرف و به فاصله‌ی ۲ قرار می‌گیرد؛ پس روی d' یا d'' است. در نتیجه نتیجه‌گیری سوم هم درست است.

۵۲ صفحه ۳۹ تمرین

۱ـ مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند.

پ) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی C(O,r) در صفحه‌ی این دایره مماس خارجی‌اند.

الف) نقاط هم‌فاصله از دو ضلع یک زاویه روی نیمساز آن زاویه‌اند. دو خط متقاطع چهار زاویه می‌سازند که نیمسازهای آن‌ها دو خط راست‌اند؛ پس مکان هندسی، **دو خط عمود بر هم** (نیمسازهای زاویه‌های بین d و d') است که از نقطه‌ی تلاقی d و d' می‌گذرند.

ب) اگر دایره در A بر d مماس باشد، شعاع در نقطه‌ی تماس بر d عمود است؛ پس مرکز روی عمود بر d در نقطه‌ی A قرار دارد و هر نقطه‌ی این عمود (به جز خود A) مرکز چنین دایره‌ای است. مکان هندسی: **خط عمود بر d در نقطه‌ی A به جز نقطه‌ی A**.

پ) دایره بر d مماس است اگر و تنها اگر فاصله‌ی مرکز از d برابر شعاع r باشد. پس مکان هندسی، **دو خط موازی d** است که در دو طرف d به فاصله‌ی r از آن قرار دارند.

ت) دو دایره مماس خارج‌اند اگر و تنها اگر فاصله‌ی مرکزهایشان برابر مجموع شعاع‌ها باشد. اینجا ؛ پس مرکز دایره‌ی متغیر از O به فاصله‌ی ثابت ۲r است. مکان هندسی: **دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲r**. (اگر شعاع دایره‌ی متغیر r' بود، شعاع این دایره $r+r'$ می‌شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۳ صفحه ۳۹ تمرین

۲ـ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

مکان نقاط هم‌فاصله از A و B، خط l_1 (عمودمنصف AB) و مکان نقاط هم‌فاصله از C و D، خط l_2 (عمودمنصف CD) است. نقطه‌ی خواسته شده، محل برخورد l_1 و l_2 است. چون $l_1 \perp AB$ و $l_2 \perp CD$ ، وضع این دو خط به وضع AB و CD بستگی دارد:

- اگر AB و CD موازی نباشند، l_1 و l_2 متقاطع‌اند و مسئله **دقیقاً یک جواب** دارد.
- اگر $AB \parallel CD$ باشد و l_1 و l_2 بر هم منطبق نباشند (مثلاً وقتی وسط‌های AB و CD روی یک خط عمود بر آن‌ها قرار ندارند)، دو خط موازی و متمایزند و مسئله **جواب ندارد**.
- اگر $AB \parallel CD$ باشد و l_1 و l_2 بر هم منطبق شوند (مانند رأس‌های یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین)، همه‌ی نقاط این خط جواب‌اند و مسئله **بی‌شمار جواب** دارد.

۵۴ صفحه ۳۹ تمرین

۳ـ نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

مکان نقاط هم‌فاصله از A و B، عمودمنصف l از پاره‌خط AB و مکان نقاطی که از C به فاصله‌ی ۳ هستند، دایره‌ی C(C,۳) است. جواب‌ها نقاط برخورد l و این دایره‌اند. اگر فاصله‌ی C از l را h بنامیم:

- اگر $h<3$: خط دایره را در **دو نقطه** قطع می‌کند؛ مسئله دو جواب دارد.
- اگر $h=3$: خط بر دایره مماس است؛ **یک جواب**.
- اگر $h>3$: خط و دایره برخورد ندارند؛ **مسئله جواب ندارد**.

توشه‌ای برای موفقیت

۵۵ صفحه ۳۹ تمرین

۴ـ نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

مکان نقاطی که از A به فاصله‌ی ۲ هستند، دایره‌ی C(A,۲) و مکان نقاطی که از d به فاصله‌ی ۳ هستند، دو خط d_1 و d_2 موازی d در دو طرف آن و به فاصله‌ی ۳ از آن است. جواب‌ها محل برخورد دایره با این دو خط‌اند.

فرض کنیم فاصله‌ی A از d برابر h باشد و d_1 خطی باشد که در همان طرفِ A قرار دارد. فاصله‌ی A از d_1 برابر $|h-3|$ و از d_2 برابر $h+3\geq 3$ است. چون $h+3>2$، دایره هرگز d_2 را قطع نمی‌کند و فقط d_1 اهمیت دارد:

- اگر $1<h<5$ (یعنی $|h-3|<2$): دایره d_1 را در **دو نقطه** قطع می‌کند؛ دو جواب.
- اگر $h=1$ یا $h=5$ (یعنی $|h-3|=2$): دایره بر d_1 مماس است؛ **یک جواب**.
- اگر $h<1$ یا $h>5$ (یعنی $|h-3|>2$): **جواب ندارد**.

۵۶ صفحه ۳۹ تمرین

۵ـ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

صفحه‌ی شامل محور از رأس A می‌گذرد و دو مولد متقارن نسبت به محور را در بر دارد؛ بنابراین فصل مشترک آن با سطح مخروطی **دو خط متقاطع** (دو مولد گذرنده از رأس A) است که نسبت به محور متقارن‌اند. (یعنی حالت تبهگون که همان دو خط متقاطع است.)

۵۷ صفحه ۳۹ تمرین

۶ـ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

فرض کنیم شعاع استوانه r باشد (فاصله‌ی d از محور l):

1. اگر P بر محور l **عمود** باشد: مقطع یک **دایره** به شعاع r است.
2. اگر P نه بر محور عمود و نه با آن موازی باشد (محور را مایل قطع کند): مقطع یک **بیضی** است.
3. اگر P با محور l **موازی** باشد و فاصله‌اش از محور کمتر از r باشد: مقطع **دو خط موازی** (دو مولد استوانه) است.
4. اگر P با محور موازی باشد و فاصله‌اش از محور برابر r باشد: صفحه بر استوانه مماس است و مقطع **یک خط** (یک مولد) است. (اگر فاصله بیشتر از r باشد، مقطع تهی است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۸ صفحه ۴۱ فعالیت

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای درباره‌ی c ،b ،a به‌دست می‌آید؟

چون طول شعاع باید عددی حقیقی (و مثبت) باشد، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد: $a^2+b^2-4c\geq 0$ (یا $a^2+b^2\geq 4c$). برای آن‌که معادله دایره‌ای واقعی با شعاع مثبت باشد باید $a^2+b^2-4c>0$ برقرار باشد.

۵۹ صفحه ۴۲ پرسش

رابطه‌ی ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد و اگر $a^2+b^2<4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2+b^2=4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

معادله با تبدیل به مربع کامل به صورت درمی‌آید. سمت چپ مجموع دو مربع و همواره نامنفی است.

- اگر $a^2+b^2-4c<0$، سمت راست منفی است و هیچ زوج حقیقی (x,y) در معادله صدق نمی‌کند؛ پس هیچ نقطه‌ای مشخص نمی‌شود.
- اگر $a^2+b^2-4c=0$، سمت راست صفر است و مجموع دو مربع فقط وقتی صفر است که هر دو صفر باشند: $x=-a/2$ و $y=-b/2$؛ پس فقط یک نقطه مشخص می‌شود.
- اگر $a^2+b^2-4c>0$، سمت راست برابر مربع عدد مثبتی (r^2) است و معادله‌ی استاندارد دایره‌ای به شعاع r می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۰ صفحه ۴۲ کار در کلاس

۱ـ معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) و شعاع آن ۳ واحد باشد.

۲ـ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳ـ کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله‌ی یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به‌دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف)

ب)

ج)

۱)

۲)

۳) الف)

پس معادله‌ی یک دایره است:

ب)

مقدار منفی است؛ پس این رابطه معادله‌ی دایره نیست (هیچ نقطه‌ای را مشخص نمی‌کند).

ج) ابتدا دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

پس دایره است با .

---

۶۱ صفحه ۴۳ **فعالیت**

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقطه‌ی O(۱,-۱) مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی ۳x-۴y+۳=۰ مماس باشد.

۱ـ با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه‌ی تماس (H) بر خط .....

۲ـ طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از .....

۳ـ به کمک دستور فاصله‌ی نقطه از خط داریم:

۴ـ معادله‌ی دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم:

۱) شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس **عمود است**.

۲) طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از **خط مماس** (زیرا OH بر خط عمود است).

۳)

۴)

---

۶۲ صفحه ۴۳ **کار در کلاس**

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) بوده و روی خط به معادله‌ی x+y=۲ وتری به طول جدا کند.

(راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)

فاصله‌ی مرکز از خط:

عمود وارد از مرکز بر وتر آن را نصف می‌کند؛ پس نصف وتر است و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ساخته‌شده (شعاع وتر است):

معادله‌ی دایره:

ایران توشه

۶۳ صفحه ۴۴ فعالیت

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) بوده و با دایره‌ی $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

۱ـ معادله‌ی دایره‌ی فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

۲ـ طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

۳ـ با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ می‌دانیم، داریم:

۴ـ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره را می‌نویسیم: چرا مسئله دو جواب دارد؟

۱)

۲)

۳)

۴)

مسئله دو جواب دارد چون هر دو مقدار و مثبت‌اند. در حالت اول دایره‌ی داده‌شده درون دایره‌ی جدید (که بزرگ‌تر است) و در حالت دوم دایره‌ی جدید درون دایره‌ی داده‌شده قرار می‌گیرد؛ در هر دو حالت دو دایره مماس داخل‌اند.

۶۴ صفحه ۴۴ کار در کلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)

ب)

ج)

د)

(راهنمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به‌دست آورده و پس از تعیین طول خط‌المرکزین از اطلاعات خود از هندسه‌ی ۲ استفاده کنید.)

الف) و

⇒ **مماس خارج** (فاصله‌ی مرکزها برابر مجموع شعاع‌هاست)

ب) و

⇒ **متقاطع** (در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند)

ج) و

⇒ **متداخل** (دایره‌ی کوچک‌تر کاملاً درون دایره‌ی بزرگ‌تر است و نقطه‌ی مشترکی ندارند)

د) و

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

⇒ **متخارج** (هر دو بیرون یکدیگرند و نقطه‌ی مشترکی ندارند)

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۶۵ صفحه ۴۵ **فعالیت**

می‌خواهیم وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=4$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.
روش اول: از معادله‌ی خط، $y=4-x$ را در معادله‌ی دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله‌ی حاصل به‌دست می‌آید):
با ساده‌کردن معادله‌ی حاصل و تعیین علامت Δ، نشان دهید معادله‌ی فوق ریشه‌ی حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه‌ی برخوردی ندارند.
روش دوم: معادله‌ی دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله‌ی مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟
با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه‌گیری‌تان را ببینید.

روش اول:

چون $\Delta<0$ است معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد، یعنی خط و دایره نقطه‌ی مشترکی ندارند.

روش دوم:

فاصله‌ی مرکز از خط :

چون فاصله‌ی مرکز از خط از شعاع بیشتر است، خط بیرون دایره قرار دارد و آن را قطع نمی‌کند. (اگر $d<r$ خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند [متقاطع]، اگر $d=r$ مماس است، و اگر $d>r$ بیرون دایره است.) شکل نیز درستی این نتیجه را نشان می‌دهد.

۶۶ صفحه ۴۵ **سؤال**

اگر در معادله‌ی حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta<0$ یا $\Delta=0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله‌ی مرکز دایره از این خط چگونه است؟

- اگر $\Delta<0$: معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؛ خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (خط **قاطع** است) و فاصله‌ی مرکز از خط **کمتر از شعاع** است ($d<r$).
- اگر $\Delta=0$: معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد؛ خط دایره را در یک نقطه قطع می‌کند (خط **مماس** است) و فاصله‌ی مرکز از خط **برابر شعاع** است ($d=r$).

- (اگر $\Delta<0$: خط و دایره نقطه‌ی مشترک ندارند و $d>r$ است.)

۶۷ صفحه ۴۶ تمرین

۱ـ معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که:

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

الف)

ب)

پ)

ت) مرکز دایره روی هر دو قطر است، پس محل برخورد دو خط است:

ج) مرکز روی خط $y=2x-1$ است: . چون $OA=OB$:

مرکز و (برای B: ✓). معادله:

۶۸ صفحه ۴۶ تمرین

۲ـ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

باید $a^2+b^2-4c>0$ باشد (در اینجا ضرایب هستند):

پس به ازای $a<17/2$ معادله‌ی یک دایره است. (برای $a=17/2$ فقط یک نقطه و برای $a>17/2$ هیچ نقطه‌ای به‌دست می‌آید.)

۶۹ صفحه ۴۶ تمرین

۳ـ وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

دایره:

هر نقطه را با فاصله‌اش از مرکز مقایسه می‌کنیم (یا مقدار را حساب می‌کنیم؛ علامت منفی: درون، صفر: روی دایره، مثبت: بیرون).

نقطه	مربع فاصله از مرکز	مقایسه با $r^2=10$	$f(x,y)$	وضعیت
$A(-1,-1)$	$1+4=5$	$5<10$	-5	درون دایره
$B(1,-2)$	$0+0=0$	$0<10$	-10	درون دایره (مرکز)
$C(2,3)$	$25+1=26$	$26>10$	16	بیرون دایره
$D(4,-1)$	$9+1=10$	$10=10$	0	روی دایره

۷۰ صفحه ۴۶ تمرین

۴ـ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)

ب)

ج)

د)

الف)

⇒ **متقاطع** (دو نقطه‌ی مشترک).

ب)

⇒ **متقاطع**.

ج)

⇒ **مماس خارج**.

د)

⇒ **متخارج** (نقطه‌ی مشترکی ندارند).

۷۱ صفحه ۴۶ تمرین

۵ـ نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(-3,1)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله‌ی دایره‌ی محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله‌ی مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

دایره‌ی را از سه نقطه می‌گذرانیم:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

جمع دو معادله‌ی اول: ؛ آنگاه و از معادله‌ی سوم .

دایره‌ی محیطی:

مماس در B(۱,۱) بر شعاع OB عمود است. شیب OB بی‌نهایت است (OB قائم، چون x_O=x_B=۱) پس مماس افقی است و معادله‌ی آن y=۱ می‌باشد. (تحقیق: فاصله‌ی O از y=۱ برابر r = ۲ است.)

۷۲ صفحه ۴۶ تمرین

۶ـ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)

ب)

ج)

الف) ⇒ خط بیرون دایره است (**جدا**).

ب) ⇒ خط بر دایره **مماس** است.

ج) ⇒ خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (**قاطع**).

۷۳ صفحه ۴۷ فعالیت

یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطه‌ی F و F′ ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و l>FF′. یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

۱ـ یک نقطه‌ی دلخواه روی شکل رسم‌شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از این دو نقطه‌ی ثابت F و F′ برابر چیست؟

۲ـ یک نقطه‌ی دلخواه مانند A در درونِ بیضیِ رسم‌شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی ثابت F و F′ وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F′ کوچک‌تر از l است. (راهنمایی: پاره‌خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۳ـ یک نقطه‌ی دلخواه مانند B بیرونِ بیضیِ رسم‌شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی F و F′ وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F′ بزرگ‌تر از l است. (راهنمایی: اگر نقطه‌ی D محل برخورد FB با بیضی باشد، F′D را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۴ـ از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه‌ی نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه‌ی دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵ـ با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ..... یک مقدار ..... است.

۱) وقتی نوک مداد در نقطه‌ی P است، نخ به دو پاره‌ی PF و PF' تقسیم شده و هر دو کشیده‌اند؛ پس $PF+PF'=l$ یعنی مجموع فاصله‌ها برابر **طول نخ** است و برای همه‌ی نقاط شکل یکسان است.

۲) FA را از طرف A امتداد می‌دهیم تا بیضی را در P قطع کند. در مثلث $AF'P$ طبق نامساوی مثلثی $AF'<AP+PF'$. دو طرف را با AF جمع می‌کنیم:

$AF+AF'<AF+AP+PF'=FP+PF'=l$ (زیرا A روی FP است). پس مجموع فواصل A از F و F' کمتر از l است.

۳) B بیرون بیضی است؛ پاره‌خط FB بیضی را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند و $FB=FD+DB$. در مثلث DBF': $BF'+BD>DF'$. دو طرف را با FD جمع می‌کنیم:

$BF+BF'=FD+DB+BF'>FD+DF'=l$ (چون D روی بیضی است و $FD+DF'=l$). پس مجموع فواصل B از F و F' بزرگ‌تر از l است.

۴) همه‌ی نقاط بیضی ویژگی مشترک «**مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر مقدار ثابت l است**» را دارند؛ نقاط درون بیضی مجموعی کمتر و نقاط بیرون آن مجموعی بیشتر از l دارند؛ پس هیچ نقطه‌ی دیگری این ویژگی را ندارد.

۵) بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو **نقطه‌ی ثابت** یک مقدار **ثابت** (بزرگ‌تر از فاصله‌ی آن دو نقطه) است.

۷۴ صفحه ۴۸ **فعالیت**

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطر کانونی) و BB' قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. F و F' کانون‌های بیضی هستند و نقطه‌ی O، وسط پاره‌خط FF'، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازه‌ی پاره‌خط‌های OB، OA و OF را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم. بنابراین فاصله‌ی دو کانون بیضی برابر ۲c است.

۱ـ در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی که مداد در نقاط A و A' قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $FA=F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA'=OA=a$ و لذا اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است.

ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲ـ الف) در رسم بیضی وضعیتی که مداد در نقطه‌ی B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید $b^2+c^2=a^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه‌ی B' نتیجه بگیرید $OB'^2+c^2=a^2$ و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB'=OB=b$ و لذا اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر ۲b است.

۱ الف) ترتیب نقاط روی قطر بزرگ A', F', F, A است. وقتی مداد در A است، نخ روی خط FF' کشیده است: $l=AF+AF'=AF+(AF+FF')=2AF+FF'$. وقتی مداد در A' است: $l=A'F'+A'F=A'F'+(A'F'+F'F)=2A'F'+FF'$. پس $2AF+FF'=2A'F'+FF'$ و $FA=F'A'$.

چون O وسط FF' است ($OF=OF'$)، داریم $OA=OF+FA=OF'+F'A'=OA'$. پس $OA=OA'=a$ و $AA'=OA+OA'=2a$.

ب) ؛ یعنی طول نخ برابر طول قطر بزرگ است.

۲ الف) مداد در B است؛ B روی عمودمنصف FF' (قطر کوچک) قرار دارد پس $BF=BF'$ و چون $BF+BF'=l=2a$، نتیجه می‌شود $BF=BF'=a$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBF (قائمه در O):

ب) همین استدلال برای B' (که آن هم روی عمودمنصف FF' است): $B'F=B'F'=a$ و در مثلث $OB'F$: $OB'^2+c^2=a^2$. پس $OB'^2=a^2-c^2=b^2=OB^2$ و $OB'=OB=b$ و $BB'=2b$.

---

۷۵ صفحه ۴۸ کار در کلاس

۱ـ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، مختصات D را به‌دست آورید.

$OF=c=4$ و $FA=a-c=4$؛ پس $a=8$ و . معادله‌ی بیضی:

خط عمود در F همان $x=4$ است. با جایگذاری:

با توجه به شکل (D بالای محور x است): (نقطه‌ی قرینه‌ی آن است).

---

۷۶ صفحه ۴۹ فعالیت

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی مورد نظر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $a\geq c\geq 0$ و لذا . دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر دارد. در رسم بیضی به‌صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصله‌ی $2c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به‌گونه‌ای انتخاب کنید که فاصله‌ی A تا F و فاصله‌ی A' تا F' برابر $a-c$ و اندازه‌ی AA' برابر $2a$ باشد، سپس با استفاده از رابطه‌ی $b^2=a^2-c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید:

۱ـ $c=1$ و $a=4$ ؛ $c/a=1/4$

۲ـ $c=2$ و $a=8$ ؛ $c/a=1/4$

۳ـ $c=1$ و $a=2$ ؛ $c/a=1/2$

۴ـ $c=2$ و $a=4$ ؛ $c/a=1/2$

۵ـ $c=3$ و $a=4$ ؛ $c/a=3/4$

۶ـ $c=6$ و $a=8$ ؛ $c/a=3/4$

در هر حالت F و F' را به فاصله‌ی $2c$ می‌گیریم، $AA'=2a$ را طوری رسم می‌کنیم که O وسط آن باشد و B و B' را روی عمودمنصف FF' به فاصله‌ی $b=\sqrt{(a^2-c^2)}$ از O می‌گیریم:

حالت	c	a	$b^2=a^2-c^2$	b	c/a
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					
۶					

نتیجه: هرچه c/a به ۱ نزدیک‌تر باشد (b کوچک‌تر)، بیضی کشیده‌تر و هرچه به ۰ نزدیک‌تر باشد، بیضی به دایره نزدیک‌تر است. بیضی‌های با نسبت c/a برابر (۱ و ۲؛ ۳ و ۴؛ ۵ و ۶) هم‌شکل (متشابه) و فقط اندازه‌شان فرق دارد.

۷۷ صفحه ۴۹ **پرسش**

در حالتی که c/a=۱ بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که c/a=۰ بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

اگر c/a=۱: $b^2=a^2-c^2=0$ و c=a پس b=۰. طول نخ $l=2a=2c=FF'$ برابر فاصله‌ی دو کانون است؛ نخ باید روی پاره‌خط FF' کشیده شود و مداد فقط روی همین پاره‌خط حرکت می‌کند. پس بیضی به پاره‌خط AA' (همان FF') تبدیل می‌شود.

اگر c/a=۰: c=۰؛ دو کانون بر هم و بر مرکز O منطبق می‌شوند و $b^2=a^2$. شرط $PF+PF'=2a$ می‌شود $2PO=2a$ یعنی $PO=a$؛ همه‌ی نقاط از O به فاصله‌ی ثابت a‌اند، یعنی دایره‌ای به شعاع a.

۷۸ صفحه ۵۰ **فعالیت**

فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد.

۱ـ مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲ـ دو زاویه‌ی α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ـ با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه‌ی داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

۱) نقطه‌ی تماس M. زیرا خط مماس به جز در M همه‌جا بیرون بیضی است؛ پس برای هر نقطه‌ی دیگر X از d طبق فعالیت ۱: $XF+XF'>l$، در حالی که برای M که روی بیضی است $MF+MF'=l$. پس کمترین مجموع در M رخ می‌دهد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲) $\alpha=\beta$. قرینه‌ی F نسبت به d را F'' می‌نامیم؛ برای هر X روی d، $XF=XF''$ پس $XF+XF'=XF''+XF'$ و این مجموع وقتی کمترین است که X روی پاره‌خط $F'F''$ باشد. طبق (۱) کمینه در M است، پس F'، M و F'' هم‌خط‌اند. زاویه‌ی MF'' با d (متقابل به رأس با زاویه‌ی β) برابر زاویه‌ی MF با d (قرینه) یعنی α است؛ پس $\alpha=\beta$.

۳) مطابق قانون بازتاب (زاویه‌ی تابش = زاویه‌ی بازتاب) و برابری $\alpha=\beta$، پرتوی تابیده‌شده از کانون F به نقطه‌ی M پس از بازتاب در امتداد MF' می‌رود؛ یعنی **از کانون دیگر (F') خواهد گذشت.**

۷۹ صفحه ۵۰ **فعالیت**

یک خط ثابت مانند d و یک نقطه‌ی ثابت مانند F خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی F از خط d برابر l باشد.

ـ یک نقطه بیابید که فاصله‌ی آن از خط d و نقطه‌ی F یکسان باشد.

ـ آیا می‌توانید نقطه‌ی دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از خط d خطی موازی رسم کنید و آن را d' بنامید. تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله‌شان از خط d برابر l است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطه‌ی F و خط d به یک فاصله باشند.

ـ اگر مسئله‌ی پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصله‌ی یکسانی از خط d و نقطه‌ی F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می‌گردد.

نقطه‌ی اول: اگر H پای عمود از F بر d باشد، وسط پاره‌خط FH از d و از F به فاصله‌ی $l/2$ است.

نقاط دیگر: d' را موازی d و گذرنده از F (به فاصله‌ی l از d) رسم می‌کنیم. همه‌ی نقاط d' از d به فاصله‌ی l هستند؛ پس کافی است نقاطی از d' بیابیم که از F هم به فاصله‌ی l باشند: دایره‌ای به مرکز F و شعاع l رسم می‌کنیم؛ این دایره d' را در دو نقطه (در دو طرف F) قطع می‌کند و این دو نقطه از F و d هر دو به فاصله‌ی l هستند.

راهکار کلی: برای هر عدد $k\geq l/2$، خط d_k موازی d به فاصله‌ی k از آن (در سمتی که F قرار دارد) رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز F و شعاع k. فاصله‌ی F از d_k برابر $|l-k|\leq k$ است، پس دایره خط را در دو نقطه (برای $k>l/2$) یا یک نقطه (برای $k=l/2$) قطع می‌کند. این نقاط از d و F هر دو به فاصله‌ی k هستند. با تغییر k نقاط بیشتری به‌دست می‌آید و مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها یک خم (سهمی) است.

۸۰ صفحه ۵۰ **فعالیت**

(فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا به نام‌های A، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه‌ی F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطه‌ی F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به‌گونه‌ای به نخ بگیرید که هر دو قسمت نخ

کاملاً کشیده باشد.) در این حالت فاصله‌ی نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطه‌ی F نسبت به هم چگونه است؟

(صفحه‌ی ۵۱) حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکه‌ی نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه‌ی درحال حرکت نوک مداد را در هر حالت با X نمایش دهیم. پاره‌خط‌های BX و FX هرکدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطه‌ی X هستند و بین آن‌ها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

توضیح دهید که با ادامه‌ی این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دو طرف نقطه‌ی F می‌توان حرکت داد.)

نخ به طول AB یک سر در A و سر دیگر در F است و مداد آن را کشیده نگه می‌دارد، پس AX+XF=AB. از طرفی X روی AB است، پس AX+XB=AB. در نتیجه XF=XB: فاصله‌ی نوک قلم از F و از خط d **برابر** است (زیرا XB به‌خاطر قائمه بودن زاویه‌ی B گونیا بر d عمود است).

پاره‌خط‌های BX و FX: BX فاصله‌ی X از خط d (چون AB⊥BC و BC روی d است) و FX فاصله‌ی X از نقطه‌ی F است. ارتباط: BX=FX (چرا که AX+XF=AB=AX+XB).

ویژگی مشترک: همه‌ی نقاطی که مداد رسم می‌کند از خط d و نقطه‌ی F به یک فاصله‌اند (XF=XB=d(X,d)) و برعکس هر نقطه‌ی هم‌فاصله از d و F با حرکت گونیا قابل رسم است. این منحنی دو طرف نقطه‌ی F ادامه می‌یابد و **سهمی** نام دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۱ صفحه ۵۱ فعالیت

۱ـ فرض کنید نقطه‌ی F(a,۰) ، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور yها به معادله‌ی x=−a باشد و نقطه‌ی P(x,y) نقطه‌ی دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم: |PB|=|PF|. چرا؟ بنابراین با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت: $y^2=۴ax$.

۲ـ در حالتی که خط هادی d موازی محور yها به معادله‌ی x=a باشد ولی کانون F(−a,۰) در سمت چپ آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $y^2=-۴ax$ است. در این حالت محور xها محور سهمی است.

۳ـ در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادله‌ی y=−a و F(۰,a) کانون در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $x^2=۴ay$ است. در این حالت محور yها محور سهمی است. (در واقع این معادله همان است که در پایه‌ی دهم به عنوان معادله‌ی سهمی با آن آشنا شدید.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴ـ در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادله‌ی y=a و F(۰,-a) کانون در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $x^2=-4ay$ است. در این حالت محور yها محور سهمی است.

۱) B پای عمود از P بر خط هادی است، پس PB فاصله‌ی P از خط هادی است و طبق تعریف سهمی (نقاط هم‌فاصله از کانون و خط هادی) PF=PB. با مربع کردن:

۲)

۳)

۴)

---

۸۲ صفحه ۵۳ پرسش

(در مثالِ «معادله‌ی سهمی به رأس A(۲,۱) و کانون F(۲,۵) را بیابید و معادله‌ی خط هادی آن را بنویسید»، با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:) ۱) a=۴ (چرا؟) ۲) معادله‌ی خط هادی آن y=-۳ است. چرا؟ ۳) (صفحه‌ی ۵۴) دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. چرا؟

۱) a فاصله‌ی رأس از کانون است: a=AF=۵-۱=۴.

۲) خط هادی عمود بر محور تقارن (x=۲) و در طرف مقابل کانون، به فاصله‌ی a=۴ از رأس است: y=۱-۴=-۳.

۳) کانون بالای رأس است و سهمی همواره به سمت کانون باز می‌شود (دور از خط هادی)، پس دهانه رو به بالاست و معادله‌ی آن است.

---

۸۳ صفحه ۵۴ پرسش

(در مثالِ «مختصات کانون و همچنین معادله‌ی سهمی به رأس A(۴,۶) و خط هادی x=۹ را بنویسید» خواهیم داشت:) ۱) a=۵ چرا؟ ۲) کانون آن به مختصات F(-۱,۶) است، چرا؟ ۳) دهانه‌ی سهمی رو به چپ است. چرا؟

۱) فاصله‌ی رأس از خط هادی برابر a است: a=۹-۴=۵.

۲) محور تقارن خط افقی y=۶ است و کانون در طرف مقابل خط هادی نسبت به رأس و به فاصله‌ی a=۵ از رأس قرار دارد: x=۴-۵=-۱، پس F(-۱,۶).

۳) خط هادی سمت راست رأس و کانون سمت چپ آن است و سهمی به سمت کانون باز می‌شود؛ پس دهانه رو به چپ است و معادله می‌شود.

ایران توشه

۸۴ صفحه ۵۵ پرسش

حال اگر خطی را که در نقطه‌ی F بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً B و B' را که به فاصله‌ی $2a\times$ از F هستند مشخص نماییم، در این صورت نقاط B و B' بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

خط گذرنده از F و عمود بر محور با خط هادی موازی است و فاصله‌ی F از خط هادی برابر $2a$ است؛ پس فاصله‌ی هر نقطه‌ی این خط، از جمله B و B'، از خط هادی برابر $2a$ است. از طرفی $BF=B'F=2a$. بنابراین B و B' از کانون و خط هادی به یک فاصله‌اند و طبق تعریف روی سهمی قرار دارند.

(با معادله: در به ازای $x=a$ داریم $y^2=4a^2$ و $y=\pm 2a$.)

۸۵ صفحه ۵۷ تمرین

۱ـ دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

چون A و B روی بیضی‌اند: $AF+AF'=BF+BF'=l$ و با فرض $AF'=BF$ نتیجه می‌شود $AF=BF'$. پس مثلث‌های $AF'F$ و BFF' سه ضلع نظیر برابر دارند ($AF'=BF$، $AF=BF'$، FF' مشترک) و هم‌نهشت‌اند: $\angle AFF'=\angle BF'F$.

الف) اگر AF و BF' درون بیضی یکدیگر را قطع نکنند، A و B در دو طرف خط FF' هستند و $\angle AFF'$ و $\angle BF'F$ زاویه‌های برابر و مبدل (متبادل) نسبت به مورب FF' می‌شوند؛ پس $AF\parallel BF'$ (در واقع $AF'BF$ متوازی‌الاضلاع است چون هر دو جفت ضلع مقابل برابرند).

ب) اگر AF و BF' در M متقاطع باشند، A و B در یک طرف FF' هستند و از $\angle MF'F=\angle MFF'$ نتیجه می‌شود مثلث FMF' متساوی‌الساقین است ($MF=MF'$). M از F و F' به یک فاصله است؛ پس روی عمودمنصف FF' یعنی روی خط قطر کوچک بیضی قرار دارد، و چون درون بیضی است روی قطر کوچک است.

۸۶ صفحه ۵۷ تمرین

۲ـ قطر دایره‌ی C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

دایره به مرکز O و شعاع a است؛ پس $OM=a$. $OF=c$ و $MF\perp OF$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OFM:

و b نصف قطر کوچک بیضی است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸۷ صفحه ۵۷ تمرین

۳ـ در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF'=MF'$

طبق فعالیت ۴، خط مماس با دو شعاع کانونی MF و MF' زاویه‌های برابر می‌سازد. N' را نقطه‌ای از d در آن‌سوی M نسبت به N بگیرید؛ آنگاه $\angle FMN'=\angle F'MN$.

چون $F'N \parallel MF$ و d مورب است، زاویه‌های متناظر برابرند: $\angle F'NM=\angle FMN'$. پس $\angle F'NM=\angle F'MN$ و در مثلث $F'MN$ دو زاویه‌ی N و M برابرند؛ مثلث متساوی‌الساقین است و $NF'=MF'$. (درستی این نتیجه برای یک بیضی نمونه نیز با محاسبه‌ی عددی راستی‌آزمایی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸۸ صفحه ۵۷ تمرین

۴ـ نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به‌گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM=OF=OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

قطرها ۶ و ۱۰ هستند:

الف) $OF=OF'=c=4$ و طبق فرض $OM=4$؛ پس $OM=OF=OF'$.

ب) چون $OM=OF=OF'=\frac{1}{2}FF'$، M روی دایره‌ای به قطر FF' است؛ یعنی میانه‌ی MO نصف ضلع FF' است و در نتیجه $\angle FMF'=90^\circ$. (یا: مثلث‌های OMF و OMF' متساوی‌الساقین‌اند و مجموع زاویه‌ها نتیجه می‌دهد زاویه‌ی M برابر 90° است.)

ج)

پس یکی از دو طول و دیگری است (نقطه‌ی M به هر کانون نزدیک‌تر باشد، طول آن کوچک‌تر است).

۸۹ صفحه ۵۷ تمرین

۵ـ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟

$2a=2\times 2b$ پس $a=2b$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$BF=BF'=a$ (چون B روی قطر کوچک است). در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBF:

چون BO نیمساز زاویه‌ی FBF' است: .

۹۰ صفحه ۵۷ تمرین

۶ـ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطرند. خط d در نقطه‌ی B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه‌ی F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\angle BCF=45^\circ$، مقدار را به‌دست آورید.

d در B مماس بر بیضی و موازی AA' است. در مثلث BFC داریم $\angle F=90^\circ$ و $\angle C=45^\circ$، پس $\angle CBF=45^\circ$. چون $BC\parallel OF$، $\angle BFO=\angle CBF=45^\circ$ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBF متساوی‌الساقین است:

مثلث BFC هم متساوی‌الساقین است و ؛ $CD\perp AA'$ پس $OD=BC=\sqrt{20}a$.

۹۱ صفحه ۵۸ تمرین

۷ـ سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

رأس $S(-2,-2)$؛ $4a=2$ پس $a=1/2$؛ دهانه رو به راست و محور سهمی خط $y=-2$ است.

کانون: ؛ خط هادی:

برخورد با محورها:

- با محور yها ($x=0$): $\Rightarrow y=0$ یا $y=-4$؛ نقاط $(0,0)$ و $(0,-4)$.
- با محور xها ($y=0$): $\Rightarrow$ فقط $(0,0)$ (محور xها با محور تقارن سهمی موازی است و آن را فقط یک بار قطع می‌کند).

۹۲ صفحه ۵۸ تمرین

۸ـ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ را به دست آورید.

با مقایسه با (فاصله‌ی کانونی p):

رأس:

کانون (به اندازه‌ی p در راستای محور بالاتر از رأس؛ برای $a<0$ پایین‌تر): ؛ خط هادی:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۳ صفحه ۵۸ تمرین

۹ـ معادله‌ی سهمی را بنویسید که S(۱,۲) رأس و F(۱,-۲) کانون آن باشد.

رأس و کانون هر دو روی خط x=۱اند؛ محور سهمی قائم است و چون کانون زیر رأس است دهانه رو به پایین است.

معادله:

(تحقیق: برای نقطه‌ی که هم‌تراز کانون است، فاصله‌اش از کانون ۸ و از خط هادی y=۶ نیز ۸ است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۴ صفحه ۵۸ تمرین

۱۰ـ سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

دایره:

جایگذاری $y^2=4x-4$:

برای سهمی $x\geq 1$ لازم است؛ پس x=۳ و . نقاط برخورد: و .

۹۵ صفحه ۵۸ تمرین

۱۱ـ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

(⇒) دایره‌ای به مرکز M از F می‌گذرد و در H بر d مماس است. شعاع MH بر d عمود است، پس MH فاصله‌ی M از d است و MH=MF (هر دو شعاع‌اند). بنابراین M از F و d به یک فاصله است و روی سهمی قرار دارد.

(⇐) اگر M روی سهمی باشد و H پای عمود از M بر d، آنگاه MF=MH. دایره‌ی به مرکز M و شعاع MH از F می‌گذرد و چون MH⊥d در H بر d مماس است.

تعریف دیگر: سهمی مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که از یک نقطه‌ی ثابت (F) می‌گذرند و بر یک خط ثابت (d، که F روی آن نیست) مماس‌اند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹۶ صفحه ۵۸ تمرین

۱۲ـ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:

H پای عمود از F بر d است؛ رأس A وسط FH است (FH=۲FA) و طبق تعریف MT=MF. چون MT∥FH (هر دو بر d عمودند)، در مثلث NFH طبق قضیه‌ی تالس:

از NF=NM+MF=NM+MT نتیجه می‌گیریم .

از طرف دیگر ؛ پس و چون FH=۲FA:

∎

۹۷ صفحه ۵۸ تمرین

۱۳ـ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده‌ی فاصله‌ی کانونی متفاوت آن‌ها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه‌ی دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازه‌ی گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله‌ی کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

مقطع دیش سهمی با رأس در مبدأ است: که در آن a فاصله‌ی کانونی است. نقطه‌ی لبه‌ی دیش روی سهمی است؛ $۲x_0$ قطر دهانه‌ی دیش و y_0 عمق آن است.

که در آن $D=۲x_0$ قطر دهانه و $h=y_0$ عمق دیش است؛ یعنی فاصله‌ی کانونی برابر «مربع قطر دهانه تقسیم بر (۱۶ برابر عمق)» است که همان دستور معلم است.

۹۸ صفحه ۵۸ تمرین

۱۴ـ فرض کنید از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه‌ی رسم این مثلث را توضیح دهید.

فرض کنیم $BC=a_0$، AH=h و محیط ۲p داده شده باشد. آنگاه مقداری ثابت (و بزرگ‌تر از BC) است.

1. پاره‌خط BC را به طول داده‌شده رسم می‌کنیم.
2. خطی موازی BC به فاصله‌ی h از آن رسم می‌کنیم؛ رأس A روی این خط است (زیرا ارتفاع AH برابر h است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

3. چون AB+AC=l ثابت است، A روی بیضی‌ای قرار دارد که کانون‌هایش B و C و مجموع فاصله‌ها (طول نخ) l است. این بیضی را با نخ و مداد (نخی به طول l که دو سرش در B و C ثابت است) یا با تعیین نقاط رسم می‌کنیم.

4. محل برخورد این بیضی با خط موازی، رأس A است (و A' قرینه‌ی آن نسبت به عمودمنصف BC).

بحث: اگر $b=\frac{1}{2}\sqrt{(l^2-a_0^2)}$ نیم‌قطر کوچک بیضی باشد، برای h<b دو جواب (A و A' مثلث‌های هم‌نهشت)، برای h=b یک جواب (مثلث متساوی‌الساقین) و برای h>b مسئله جواب ندارد.

۹۹ صفحه ۵۹ تمرین

۱۵ـ سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1: y=ax+b$ و $d_2: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطه‌ی M را به‌دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه‌ی M' (نقطه‌ی وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) به‌دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

الف)

ب) طول‌های A و B ریشه‌های این معادله‌اند:

پ)

ت) M و M' طول یکسان $a/2$ دارند؛ پس خط MM' **موازی محور yها** (قائم) است، یعنی موازی محور تقارن سهمی $y=x^2$.

ث) این ویژگی برای هر سهمی برقرار است: وسط‌های وترهای موازی یک سهمی روی خطی موازی محور تقارن قرار دارند. روش رسم محور:

1. دو وتر موازی دلخواه از سهمی رسم می‌کنیم و وسط‌های آن‌ها را M و M' می‌نامیم؛ خط MM' موازی محور سهمی است.
2. وتری عمود بر MM' (یعنی عمود بر راستای محور) رسم می‌کنیم؛ وسط این وتر N روی محور سهمی قرار دارد.
3. خطی که از N موازی MM' رسم شود (یا عمودمنصف همین وتر) محور تقارن سهمی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

هندسه (۳) دوازدهم - فصل سوم

بردارها

فهرست

۱۰۰ صفحه ۶۲ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ - رسم رابطه‌ها در صفحه ۵۳

۱۰۱ صفحه ۶۳ · کار در کلاس — کار در کلاس ۲ - نوشتن رابطه‌ی شکل ۵۳

۱۰۲ صفحه ۶۷ · فعالیت — فعالیت - صفحه‌ی yz و معادله‌ی x=0 ..... ۵۴

۱۰۳ صفحه ۶۷ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ - دو نقطه روی هر صفحه ۵۴

۱۰۴ صفحه ۶۸ · کار در کلاس — کار در کلاس ۲ - مکعب مستطیل ۵۵

۱۰۵ صفحه ۷۰ · پرسش — تعبیر هندسی تفاضل دو بردار ۵۶

۱۰۶ صفحه ۷۳ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ - جمع و تفاضل در صفحه ۵۶

۱۰۷ صفحه ۷۴ · پرسش — راستای ra و a ۵۷

۱۰۸ صفحه ۷۴ · پرسش — چرا -a هم‌اندازه با a است؟ ۵۷

۱۰۹ صفحه ۷۴ · کار در کلاس — کار در کلاس - جمع و ضرب عدد در بردار در R^3 ..... ۵۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۰ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۱ – سطح چهارضلعی ABCD ۵۸
۱۱۱ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۲ – نمایش نقاط ۵۸
۱۱۲ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۳ – طول پاره‌خط‌ها ۵۸
۱۱۳ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۴ – وسط پاره‌خط ۵۸
۱۱۴ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۵ – ترکیب خطی بردارها ۵۹
۱۱۵ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۶ – طول بردار a ۵۹
۱۱۶ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ – تصویر i بر j ۵۹
۱۱۷ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۲ – تصویر بردارهای عمود ۵۹
۱۱۸ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۳ – تصویر بردارهای هم‌راستا ۶۰
۱۱۹ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۴ – نظیر کردن حالت‌ها با شکل ۶۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۰ صفحه ۸۳ · پرسش — حالت K = 0 در حجم متوازی‌السطوح ۶۰

۱۲۱ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۱ – تصویر قائم بردار ۶۱

۱۲۲ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۲ – بردارهای با مجموع صفر ۶۱

۱۲۳ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۳ – مثال برای حذف در ضرب داخلی ۶۱

۱۲۴ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۴ – تصویر بر b+c ۶۱

۱۲۵ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۵ – بردار عمود بر دو بردار ۶۱

۱۲۶ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۶ – حذف در ضرب خارجی ۶۲

۱۲۷ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۷ – محاسبه‌ی ضرب داخلی از ضرب خارجی ۶۲

۱۲۸ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۸ – مساحت مثلث ۶۲

۱۲۹ صفحه ۸۶ · مجله ریاضی — مثال ۵ – قطرهای متوازی‌الاضلاع ۶۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۰ صفحه ۶۲ کار در کلاس

۱ـ برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

الف) $x=0$

ب) $y=0$

پ) $x=1$

ت) $x=1 , -1\leq y<3$

ث) $y=x^2 , -1<x\leq 2$

ج) $y=x^2 , 1\leq x\leq 2$

چ) $-1\leq x\leq 1 , -2\leq y\leq 1$

ح) $x^2<y\leq 2$

خ) $y\geq x^2$

الف) نقاطی مانند در رابطه‌ی $x=0$ صدق می‌کنند (طول همه‌ی نقاط صفر است). شکل: **محور yها**.

ب) نقاطی مانند صدق می‌کنند. شکل: **محور xها**.

پ) نقاطی مانند صدق می‌کنند. شکل: **خطی قائم موازی محور yها** که از نقطه‌ی می‌گذرد.

ت) نقاطی مانند . شکل: **پاره‌خطی قائم** روی خط $x=1$ از نقطه‌ی (توپر) تا نقطه‌ی (توخالی، چون $y<3$).

ث) نقاطی مانند . شکل: **قسمتی از سهمی** $y=x^2$ از نقطه‌ی (توخالی) تا نقطه‌ی (توپر).

ج) نقاطی مانند . شکل: **قسمتی از سهمی** $y=x^2$ بین دو نقطه‌ی و (هر دو توپر).

چ) نقاطی مانند . شکل: **ناحیه‌ی مستطیلی** (با مرز) به رأس‌های و .

ح) نقاطی مانند . شکل: **ناحیه‌ی بین سهمی و خط** $y=2$؛ نقاط روی سهمی (مرز پایین) جزو ناحیه نیستند (خط‌چین) ولی نقاط روی خط $y=2$ جزو ناحیه‌اند.

خ) نقاطی مانند . شکل: **ناحیه‌ی درون سهمی** $y=x^2$ (شامل خود سهمی).

۱۰۱ صفحه ۶۳ کار در کلاس

۲ـ در هر یک از شکل‌های روبه‌رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص‌شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه‌ی مربوط به آن شکل را بنویسید. (صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آن‌ها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.)

الف) نقاطی مانند ؛ عرض همه‌ی نقاط برابر ۲ است و طول آن‌ها از ۲- تا ۴ تغییر می‌کند (دو سر پاره‌خط جزو شکل‌اند):

$y=2 , -2\leq x\leq 4$

irantooshe.ir

ب) نقاطی مانند ؛ عرض نقاط بین ۲- و ۱- و طول آن‌ها از ۳٫۵- به بعد (به سمت راست) است:

$-۲\le y\le -۱\ ,\ x\ge -۳.۵$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

پ) نقاطی مانند ؛ طول نقاط بین ۱ و ۲ و عرض آن‌ها بین ۱- و ۲ است:

$۱\le x\le ۲\ ,\ -۱\le y\le ۲$

ت) نقاطی مانند ؛ طول همه‌ی نقاط ۴ و عرض آن‌ها از ۴- تا ۱- است:

$x=۴\ ,\ -۴\le y\le -۱$

---

۱۰۲ صفحه ۶۷ **فعالیت**

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله‌ی $x=۰$ در $\mathbb{R}^3$ تمام نقاط صفحه‌ی yz است (به عبارتی $x=۰$ معادله صفحه‌ی yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و zهای دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه‌ی yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x=۰$ شرط $z=۰$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه‌ی yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آن‌ها $z=۰$ باشد.)

۱ـ مختصات چند نقطه را که در رابطه‌ی $x=۰\ ,\ z=۰$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آن‌ها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲ـ نمودار مربوط به معادلات $x=۰\ ,\ z=۰$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی $x=۰$ دارد؟

۱) نقاط به صورت هستند؛ مانند . همه‌ی این نقاط روی **محور yها** قرار دارند (مؤلفه‌ی اول و سوم صفر و مؤلفه‌ی دوم دلخواه است).

۲) نمودار دستگاه $x=۰\ ,\ z=۰$ خطی است که همان **محور yها** است. چون $x=۰$ صفحه‌ی yz و $z=۰$ صفحه‌ی xy است، این نمودار فصل مشترک این دو صفحه است؛ یعنی نمودار دستگاه، زیرمجموعه‌ای (یک خط) از صفحه‌ی yz (نمودار $x=۰$) است که با افزودن شرط $z=۰$ از آن جدا شده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

---

۱۰۳ صفحه ۶۷ **کار در کلاس**

۱ـ در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

الف) صفحه‌های $y=-۳$، $y=۱$، $y=۳$ (موازی صفحه‌ی xz): در هر صفحه، عرض نقطه ثابت و x و z دلخواه است.

- $y=-۳$: و
- $y=۱$: و
- $y=۳$: و

ب) صفحه‌های $z=-3$، $z=1$، $z=3$ (موازی صفحه‌ی xy):

- $z=-3$ و:
- $z=1$ و:
- $z=3$ و:

پ) صفحه‌های $x=-3$، $x=1$، $x=3$ (موازی صفحه‌ی yz):

- $x=-3$ و:
- $x=1$ و:
- $x=3$ و:

۱۰۴ صفحه ۶۸ کار در کلاس

۲ـ وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=1$، $x=3$، $y=1$، $y=4$، $z=-2$ و $z=2$ هستند.

الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ث) روابط مشخص‌کننده‌ی یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده‌ی پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید. $z=2$, $1\le y\le 4$, $1\le x\le 3$

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده‌ی حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعبِ داده شده باشند.

مکعب مستطیل با روابط $-2\le z\le 2$, $1\le y\le 4$, $1\le x\le 3$ مشخص می‌شود.

الف) نقطه‌ی هر وجه را در درون همان وجه (نه روی لبه‌های آن) برمی‌گزینیم:

- وجه $x=1$: ؛ وجه $x=3$:
- وجه $y=1$: ؛ وجه $y=4$:
- وجه $z=2$: ؛ وجه $z=-2$:

ب) نقاط روی یال‌ها (فصل مشترک دو وجه) دقیقاً بر دو وجه‌اند؛ مثلاً (روی وجه‌های $x=1$ و $y=1$)، (روی وجه‌های $x=3$ و $z=2$) و (روی وجه‌های $y=4$ و $z=-2$).

پ) دوازده یال داریم:

- چهار یال موازی محور zها: $x=۱ , y=۱ , -۲\le z\le ۲$، $x=۱ , y=۴ , -۲\le z\le ۲$، $x=۳ , y=۱ , -۲\le z\le ۲$، $x=۳ , y=۴ , -۲\le z\le ۲$
- چهار یال موازی محور yها: $x=۱ , z=۲ , ۱\le y\le ۴$، $x=۱ , z=-۲ , ۱\le y\le ۴$، $x=۳ , z=۲ , ۱\le y\le ۴$، $x=۳ , z=-۲ , ۱\le y\le ۴$
- چهار یال موازی محور xها: $y=۱ , z=۲ , ۱\le x\le ۳$، $y=۱ , z=-۲ , ۱\le x\le ۳$، $y=۴ , z=۲ , ۱\le x\le ۳$، $y=۴ , z=-۲ , ۱\le x\le ۳$

ت) هشت رأس: و .

ث) پنج وجه‌ی دیگر:

- $z=-۲ , ۱\le x\le ۳ , ۱\le y\le ۴$
- $x=۱ , ۱\le y\le ۴ , -۲\le z\le ۲$
- $x=۳ , ۱\le y\le ۴ , -۲\le z\le ۲$
- $y=۱ , ۱\le x\le ۳ , -۲\le z\le ۲$
- $y=۴ , ۱\le x\le ۳ , -۲\le z\le ۲$

ج) نقطه‌ی درونی (همه‌ی نابرابری‌ها اکید): . نقطه‌ای روی یک وجه و غیر واقع بر یال‌ها: (روی وجه $z=۲$).

چ) نقطه‌ی درون مکعب است اگر $-۲<z<۲$, $۱<y<۴$, $۱<x<۳$ و روی یکی از وجه‌ها است اگر در , $۱\le y\le ۴$, $۱\le x\le ۳$ $-۲\le z\le ۲$ صدق کند و دست‌کم در یکی از این شش نابرابری، تساوی برقرار باشد. بنابراین شرط «درون یا روی یکی از وجه‌ها»: $-۲\le z\le ۲$, $۱\le y\le ۴$, $۱\le x\le ۳$.

ح) حجم محدود شده (درون و روی سطح): $-۲\le z\le ۲$, $۱\le y\le ۴$, $۱\le x\le ۳$. (حجم آن است.)

۱۰۵ صفحه ۷۰ پرسش

به نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

چون ، برای رسم تفاضل ابتدا قرینه‌ی یعنی (هم‌اندازه با و در خلاف جهت آن) را رسم می‌کنیم، سپس با روش متوازی‌الاضلاع (یا با گذاشتن ابتدای روی انتهای) و را جمع می‌کنیم.

اگر و ابتدای یکسان داشته باشند، برداری است که از **انتهای b** به **انتهای a** رسم می‌شود؛ یعنی قطر دیگر متوازی‌الاضلاعی که و می‌سازند. (زیرا .)

۱۰۶ صفحه ۷۳ کار در کلاس

۱ـ در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده‌است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) مختصات بردار را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه‌ی بردارهای و را رسم کرده و مختصات آن‌ها را به‌دست آورید.

ج) مؤلفه‌های بردارهای و را یافته، آن‌ها را رسم کنید و اندازه‌ی هر یک را به‌دست آورید.

د) هریک از بردارهای و را برحسب بردارهای واحد به‌دست آورید.

از روی شکل: .

الف)

ب)

ج)

د)

(در شکل، بردارهای خط‌چین قرینه‌ی و و بردار سبز است.)

○

۱۰۷ صفحه ۷۴ پرسش

آیا راستای و با هم متفاوت‌اند؟

خیر؛ مضربی از است، پس دو بردار موازی‌اند و راستای یکسان دارند. (برای هم‌جهت‌اند و بلندتر است.)

۱۰۸ صفحه ۷۴ پرسش

بردار هم اندازه با (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می‌باشد.

زیرا مربع هر عدد با مربع قرینه‌ی آن برابر است؛ ولی چون ضریب منفی دارد، خلاف جهت است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۹ صفحه ۷۴ کار در کلاس

نقاط $B=(-1,2,2)$ ، $A=(2,3,1)$ ، $C=(3,4,0)$ و $D=(1,0,-1)$ را در یک دستگاه $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید. اگر بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ با نقاط انتهایی A,B,C,D به ترتیب باشند آنگاه آن‌ها را در دستگاه فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را به‌دست آورید.

(هر بردار از مبدأ به نقطه‌ی مربوط رسم می‌شود).

○ (برابر حالت قبل: خاصیت شرکت‌پذیری)

○ (برابر حالت قبل: خاصیت پخشی)

۱۱۰ صفحه ۷۶ تمرین

۱ـ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی ABCD را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح ABCD هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

از شکل: . هر چهار نقطه در صفحه‌ی $z=۳$ قرار دارند و چهارضلعی یک ذوزنقه است ($AB \parallel CD$، هر دو افقی) با رأس‌ها به ترتیب .

ساق چپ روی خط $x-y=-۲$ و ساق راست روی خط $x=۲$ است؛ قاعده‌ها روی $y=۱$ و $y=-۱$ قرار دارند.

الف) $z=۳ \ , \ -۱\le y\le ۱ \ , \ y-۲\le x\le ۲$

(مساحت: .)

ب) انتقال سطح در راستای محور z: مثلاً $z=۰ \ , \ -۱\le y\le ۱ \ , \ y-۲\le x\le ۲$ (یا $z=۵$) که هم‌مساحت و موازی سطح ABCD است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۱ صفحه ۷۶ تمرین

۲ـ نقاط با مختصات $R=(۳,۰,-۱)$ ، $Q=(۰,-۱,-۲)$ ، $P=(۱,۰,۱)$ و $S=(-۲,-۲,-۲)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

هر نقطه را ابتدا در صفحه‌ی xy با دو مؤلفه‌ی اول مشخص و سپس به اندازه‌ی مؤلفه‌ی سوم در راستای محور z بالا یا پایین می‌بریم:

۱۱۲ صفحه ۷۶ تمرین

۳ـ در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

۱۱۳ صفحه ۷۶ تمرین

۴ـ فرض کنید $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$. مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط PQ را بیابید.

چون ، و در نتیجه :

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۴ صفحه ۷۶ تمرین

۵ـ در کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف)

ب)

ج)

د)

الف)

ب)

ج)

د)

۱۱۵ صفحه ۷۶ تمرین

۶ـ طول بردار را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

الف)

ب)

ج)

د)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۶ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۱ـ تصویر بردار (۱,۰,۰) = i بر امتداد بردار (۰,۱,۰) = j را بیابید.

(تصویر، بردار صفر است؛ زیرا .)

۱۱۷ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۲ـ نشان دهید که اگر دو بردار و بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می‌شود.

اگر آنگاه . پس

و ∎ (فرض: دو بردار ناصفرند.)

۱۱۸ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۳ـ نشان دهید که اگر دو بردار و در یک راستا باشند آنگاه تصویر بر برابر خود می‌شود.

چون دو بردار (ناصفر) هم‌راستایند، عدد حقیقی ناصفر k هست که . آنگاه و و

∎

۱۱۹ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۴ـ هر یک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $a.b > 0$

ب) $a.b = 0$

پ) $a.b < 0$

ت) $a.b = |a||b|$

ج) $a.b = -|a||b|$

شکل‌ها از راست به چپ مربوط به $\theta=0$، $0<\theta<\pi/2$، $\theta=\pi/2$، $\pi/2<\theta<\pi$ و $\theta=\pi$ هستند. از رابطه‌ی و علامت $\cos\theta$:

- الف) $a.b > 0 \Leftrightarrow \cos\theta>0 \Leftrightarrow 0<\theta<\pi/2$ زاویه‌ی تند: شکل با (شکل دوم از راست)
- ب) $a.b = 0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\pi/2$: شکل سوم از راست (دو بردار عمود)
- پ) $a.b < 0 \Leftrightarrow \cos\theta<0 \Leftrightarrow \pi/2<\theta<\pi$ زاویه‌ی باز: شکل با (شکل چهارم از راست)
- ت) $a.b = |a||b| \Leftrightarrow \cos\theta=1 \Leftrightarrow \theta=0$: شکل اول از راست (هم‌جهت)
- ج) $a.b = -|a||b| \Leftrightarrow \cos\theta=-1 \Leftrightarrow \theta=\pi$: شکل پنجم از راست (خلاف جهت)

۱۲۰ صفحه ۸۳ پرسش

اگر $K = 0$ در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حجم متوازی‌السطوح تولیدشده با سه بردار برابر است؛ یعنی متوازی‌السطوح «تخت» شده و سه بردار ، و **در یک صفحه‌اند (هم‌صفحه‌اند)**. (به‌طور معادل: و دترمینان سه بردار صفر است.)

۱۲۱ صفحه ۸۴ تمرین

۱ـ برای هر یک از بردارهای و که در زیر آمده است تصویر قائم را بر امتداد به‌دست آورید.

الف) $a = (۲,-۱,۲)$ ، $b = i$

ب) $a = (۲,۳,۱)$ ، $b = (۳,۲,۱)$

ج) $a = (۱,۱,۰)$ ، $b = (-۱,۲,۴)$

از فرمول استفاده می‌کنیم.

الف)

ب)

ج)

۱۲۲ صفحه ۸۴ تمرین

۲ـ فرض کنید ، و بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که . مقدار را محاسبه کنید.

دو طرف تساوی را در خودش ضرب داخلی می‌کنیم:

۱۲۳ صفحه ۸۴ تمرین

۳ـ سه بردار ، و مثال بزنید که برای آن‌ها ولی .

ولی . (در حالت کلی فقط می‌گوید بر عمود است؛ پس حذف مجاز نیست.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۴ صفحه ۸۴ تمرین

۴ـ اگر $b = (۳,-۴,۲)$ ، $a = (۱,-۳,۴)$ و $c = (-۱,۱,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم بر امتداد را به‌دست آورید.

۱۲۵ صفحه ۸۴ تمرین

۵ـ برداری عمود بر دو $b = (-۲,۱,-۵)$, $a = (۱,-۳,۲)$ بردار پیدا کنید.

ضرب خارجی دو بردار بر هر دو عمود است:

بررسی: و . هر مضرب ناصفر این بردار نیز جواب است.

۱۲۶ صفحه ۸۴ تمرین

۶ـ سه بردار ، و مثال بزنید که برای آن‌ها ولی . آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

ولی .

بحث: از نتیجه می‌شود ، یعنی فقط با موازی است (در مثال بالا). پس **حذف در ضرب خارجی برقرار نیست** (در ضرب داخلی نیز برقرار نبود).

۱۲۷ صفحه ۸۴ تمرین

۷ـ بردارهای و مفروض‌اند به‌طوری که ۲۶ = |b| , ۳ = |a| و ۷۲ = |a×b|. مقدار a.b را محاسبه کنید.

از اتحاد (زیرا):

(علامت به زاویه‌ی بین دو بردار بستگی دارد: برای زاویه‌ی تند و برای زاویه‌ی باز).

۱۲۸ صفحه ۸۴ تمرین

۸ـ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط (۴-,۰,۴) = C , (۵,۵,۰) = B , (۳,۵,۷) = A داده شده است را بیابید.

مساحت مثلث نصف مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده بر دو ضلع است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۹ صفحه ۸۶ مجله ریاضی

مثال ۵ : ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. ... اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.

در متوازی‌الاضلاع داریم ، پس و از جمع دو تساوی‌ی کتاب (استدلال ناتمام) نتیجه می‌شود:

O محل برخورد قطرهای AC و BD است؛ پس برداری در امتداد و برداری در امتداد است. این دو بردار برابرند ولی دو امتداد و موازی نیستند؛ بنابراین هر دو بردار صفرند:

یعنی O وسط AC و وسط BD است؛ قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند ∎

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت