با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام هندسه (۳) دوازدهم
فصل سوم

عنوان فصل: بردارها

از صفحه‌ی ۶۱ تا صفحه‌ی ۸۶ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل بردارها آمده است.

مباحث فصل: معرفی فضای R^3، ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۶۲ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ - رسم رابطه‌ها در صفحه	۵
۲	صفحه ۶۳ · کار در کلاس — کار در کلاس ۲ - نوشتن رابطه‌ی شکل	۶
۳	صفحه ۶۷ · فعالیت — فعالیت - صفحه‌ی yz و معادله‌ی x=0	۷
۴	صفحه ۶۷ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ - دو نقطه روی هر صفحه	۸
۵	صفحه ۶۸ · کار در کلاس — کار در کلاس ۲ - مکعب مستطیل	۸
۶	صفحه ۷۰ · پرسش — تعبیر هندسی تفاضل دو بردار	۱۰
۷	صفحه ۷۳ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ - جمع و تفاضل در صفحه	۱۰
۸	صفحه ۷۴ · پرسش — راستای ra و a	۱۱
۹	صفحه ۷۴ · پرسش — چرا -a هم‌اندازه با a است؟	۱۱
۱۰	صفحه ۷۴ · کار در کلاس — کار در کلاس - جمع و ضرب عدد در بردار در R^3	۱۱
۱۱	صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۱ - سطح چهارضلعی ABCD	۱۲
۱۲	صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۲ - نمایش نقاط	۱۳
۱۳	صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۳ - طول پاره‌خط‌ها	۱۳
۱۴	صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۴ - وسط پاره‌خط	۱۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۵ – ترکیب خطی بردارها ۱۴

۱۶ صفحه ۷۶ · تمرین — تمرین ۶ – طول بردار a ۱۴

۱۷ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۱ – تصویر i بر j ۱۴

۱۸ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۲ – تصویر بردارهای عمود ۱۵

۱۹ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۳ – تصویر بردارهای هم‌راستا ۱۵

۲۰ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — کار در کلاس ۴ – نظیر کردن حالت‌ها با شکل ۱۵

۲۱ صفحه ۸۳ · پرسش — حالت K = 0 در حجم متوازی‌السطوح ۱۶

۲۲ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۱ – تصویر قائم بردار ۱۶

۲۳ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۲ – بردارهای با مجموع صفر ۱۶

۲۴ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۳ – مثال برای حذف در ضرب داخلی ۱۶

۲۵ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۴ – تصویر بر b+c ۱۷

۲۶ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۵ – بردار عمود بر دو بردار ۱۷

۲۷ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۶ – حذف در ضرب خارجی ۱۷

۲۸ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۷ – محاسبه‌ی ضرب داخلی از ضرب خارجی ۱۸

۲۹ صفحه ۸۴ · تمرین — تمرین ۸ – مساحت مثلث ۱۸

۳۰ صفحه ۸۶ · مجله ریاضی — مثال ۵ – قطرهای متوازی‌الاضلاع ۱۸

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۶۲ کار در کلاس

۱ـ برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

الف) $x=0$

ب) $y=0$

پ) $x=1$

ت) $x=1\ ,\ -1\le y<3$

ث) $y=x^2\ ,\ -1<x\le 2$

ج) $y=x^2\ ,\ 1\le x\le 2$

چ) $-1\le x\le 1\ ,\ -2\le y\le 1$

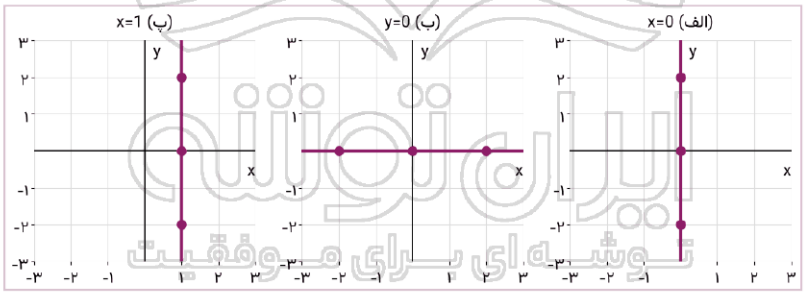
ح) $x^2<y\le 2$

خ) $y\ge x^2$

الف) نقاطی مانند $(0,-2)$,$(0,2)$,$(0,0)$ در رابطه‌ی $x=0$ صدق می‌کنند (طول همه‌ی نقاط صفر است). شکل: **محور yها**.

ب) نقاطی مانند $(-2,0)$,$(2,0)$,$(0,0)$ صدق می‌کنند. شکل: **محور xها**.

پ) نقاطی مانند $(-2,1)$,$(2,1)$,$(0,1)$ صدق می‌کنند. شکل: **خطی قائم موازی محور yها** که از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرد.



ت) نقاطی مانند $(2,1)$,$(0,1)$,$(-1,1)$. شکل: **پاره‌خطی قائم** روی خط $x=1$ از نقطه‌ی $(-1,1)$ (توپر) تا نقطه‌ی $(3,1)$ (توخالی، چون $y<3$).

ث) نقاطی مانند $(4,2)$,$(1,1)$,$(0,0)$. شکل: **قسمتی از سهمی** $y=x^2$ از نقطه‌ی $(-1,1)$ (توخالی) تا نقطه‌ی $(4,2)$ (توپر).

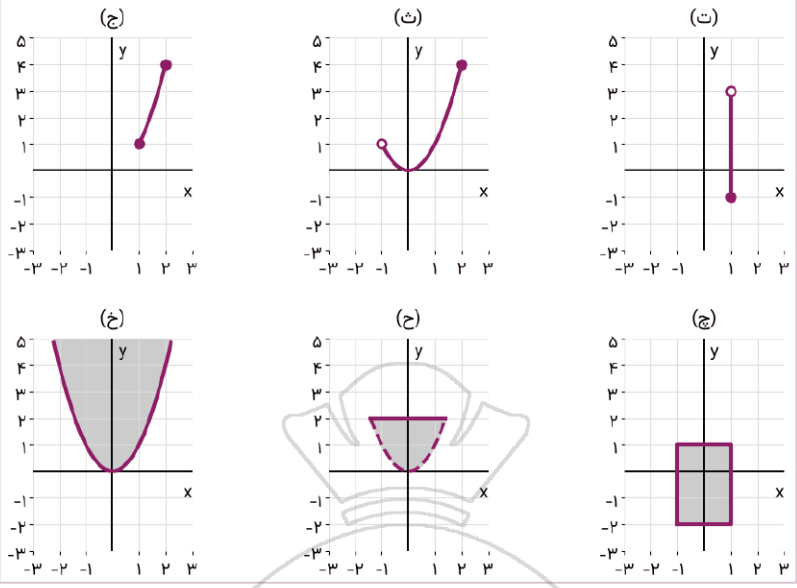
ج) نقاطی مانند $(4,2)$,$(2/25,1/5)$,$(1,1)$. شکل: **قسمتی از سهمی** $y=x^2$ بین دو نقطه‌ی $(1,1)$ و $(4,2)$ (هر دو توپر).

چ) نقاطی مانند $(-2,-1)$,$(1,1)$,$(0,0)$. شکل: **ناحیه‌ی مستطیلی** (با مرز) به رأس‌های $(\pm1,1)$ و $(\pm1,-2)$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ح) نقاطی مانند $(-1,1/5)$,$(1,2)$,$(0,1)$. شکل: **ناحیه‌ی بین سهمی و خط** $y=2$؛ نقاط روی سهمی (مرز پایین) جزو ناحیه نیستند (خط‌چین) ولی نقاط روی خط $y=2$ جزو ناحیه‌اند.

خ) نقاطی مانند $(1,1)$,$(0,3)$,$(0,0)$. شکل: **ناحیه‌ی درون سهمی** $y=x^2$ (شامل خود سهمی).



۲ صفحه ۶۳ **کار در کلاس**

۲ـ در هر یک از شکل‌های روبه‌رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص‌شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه‌ی مربوط به آن شکل را بنویسید. (صرفاً ناحیه‌هایی مدنظر است که مرزهای آن‌ها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.)

الف) نقاطی مانند $(4,2)$,$(0,2)$,$(-2,2)$؛ عرض همه‌ی نقاط برابر ۲ است و طول آن‌ها از ۲- تا ۴ تغییر می‌کند (دو سر پاره‌خط جزو شکل‌اند):

$y=2 \ , \ -2\le x\le 4$

ب) نقاطی مانند $(-1/5,-3/5)$,$(-2,0)$,$(-1,0)$؛ عرض نقاط بین ۲- و ۱- و طول آن‌ها از ۳/۵- به بعد (به سمت راست) است:

$-2\le y\le -1 \ , \ x\ge -3.5$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

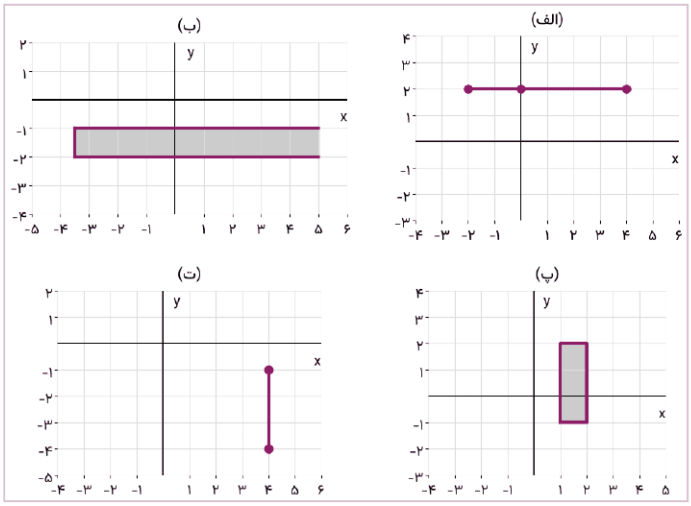
پ) نقاطی مانند $(-1,1/5)$,$(2,2)$,$(1,0)$؛ طول نقاط بین ۱ و ۲ و عرض آن‌ها بین ۱- و ۲ است:

$1\le x\le 2 \ , \ -1\le y\le 2$

ت) نقاطی مانند $(-4,4)$,$(-2,4)$,$(-1,4)$؛ طول همه‌ی نقاط ۴ و عرض آن‌ها از ۴- تا ۱- است:

$x=4 \ , \ -4\le y\le -1$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



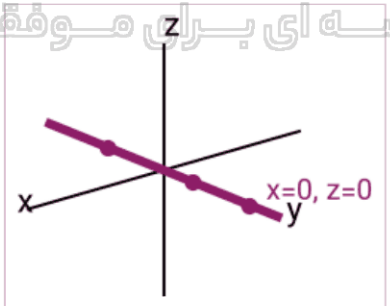
۳ صفحه ۶۷ **فعالیت**

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله‌ی $x=0$ در $\mathbb{R}^3$ تمام نقاط صفحه‌ی yz است (به عبارتی $x=0$ معادله صفحه‌ی yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و zهای دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه‌ی yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x=0$ شرط $z=0$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه‌ی yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آن‌ها $z=0$ باشد.)

۱ـ مختصات چند نقطه را که در رابطه‌ی $x=0$, $z=0$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آن‌ها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲ـ نمودار مربوط به معادلات $x=0$, $z=0$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی $x=0$ دارد؟

۱) نقاط به صورت $(0, y, 0)$ هستند؛ مانند $(0, 5, 0)$,$(0, -2, 0)$,$(0, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$. همه‌ی این نقاط روی **محور yها** قرار دارند (مؤلفه‌ی اول و سوم صفر و مؤلفه‌ی دوم دلخواه است).



۲) نمودار دستگاه $x=0$, $z=0$ خطی است که همان **محور yها** است. چون $x=0$ صفحه‌ی yz و $z=0$ صفحه‌ی xy است، این نمودار فصل مشترک این دو صفحه است؛ یعنی نمودار دستگاه، زیرمجموعه‌ای (یک خط) از صفحه‌ی yz (نمودار $x=0$) است که با افزودن شرط $z=0$ از آن جدا شده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ صفحه ۶۷ کار در کلاس

۱ـ در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.

الف) صفحه‌های $y=-۳$، $y=۱$، $y=۳$ (موازی صفحه‌ی xz): در هر صفحه، عرض نقطه ثابت و x و z دلخواه است.

- $y=-۳$: $(۰, -۳, ۰)$ و $(۲, -۳, ۱)$
- $y=۱$: $(۰, ۱, ۰)$ و $(-۱, ۱, ۲)$
- $y=۳$: $(۰, ۳, ۰)$ و $(۱, ۳, -۲)$

ب) صفحه‌های $z=-۳$، $z=۱$، $z=۳$ (موازی صفحه‌ی xy):

- $z=-۳$: $(۰, ۰, -۳)$ و $(۱, ۲, -۳)$
- $z=۱$: $(۰, ۰, ۱)$ و $(-۲, ۱, ۱)$
- $z=۳$: $(۰, ۰, ۳)$ و $(۲, -۱, ۳)$

پ) صفحه‌های $x=-۳$، $x=۱$، $x=۳$ (موازی صفحه‌ی yz):

- $x=-۳$: $(-۳, ۰, ۰)$ و $(-۳, ۲, ۱)$
- $x=۱$: $(۱, ۰, ۰)$ و $(۱, -۱, ۲)$
- $x=۳$: $(۳, ۰, ۰)$ و $(۳, ۱, -۲)$

۵ صفحه ۶۸ کار در کلاس

۲ـ وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=۱$، $x=۳$، $y=۱$، $y=۴$، $z=-۲$ و $z=۲$ هستند.

الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ث) روابط مشخص‌کننده‌ی یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص‌کننده‌ی پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید. $z=۲$, $۱\le y\le ۴$, $۱\le x\le ۳$

ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بیابید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

ح) روابطی را بنویسید که مشخص‌کننده‌ی حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعبِ داده شده باشند.

مکعب مستطیل با روابط $-2\le z\le 2$, $1\le y\le 4$, $1\le x\le 3$ مشخص می‌شود.

الف) نقطه‌ی هر وجه را در درون همان وجه (نه روی لبه‌های آن) برمی‌گزینیم:

- وجه $x=1$: $(1, 2, 0)$؛ وجه $x=3$: $(3, 2, 0)$
- وجه $y=1$: $(2, 1, 0)$؛ وجه $y=4$: $(2, 4, 0)$
- وجه $z=2$: $(2, 2, 2)$؛ وجه $z=-2$: $(2, 2, -2)$

ب) نقاط روی یال‌ها (فصل مشترک دو وجه) دقیقاً بر دو وجه‌اند؛ مثلاً $(1, 1, 0)$ (روی وجه‌های $x=1$ و $y=1$)، $(3, 2, 2)$ (روی وجه‌های $x=3$ و $z=2$) و $(2, 4, -2)$ (روی وجه‌های $y=4$ و $z=-2$).

پ) دوازده یال داریم:

- چهار یال موازی محور zها: $x=1, y=1, -2\le z\le 2$، $x=1, y=4, -2\le z\le 2$، $x=3, y=1, -2\le z\le 2$، $x=3, y=4, -2\le z\le 2$
- چهار یال موازی محور yها: $x=1, z=2, 1\le y\le 4$، $x=1, z=-2, 1\le y\le 4$، $x=3, z=2, 1\le y\le 4$، $x=3, z=-2, 1\le y\le 4$
- چهار یال موازی محور xها: $1\le x\le 3, z=2, y=1$، $1\le x\le 3, z=-2, y=1$، $1\le x\le 3, z=2, y=4$، $1\le x\le 3, z=-2, y=4$

ت) هشت رأس: $(3, 4, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(1, 4, 2)$, $(1, 1, 2)$ و $(3, 4, -2)$, $(3, 1, -2)$, $(1, 4, -2)$, $(1, 1, -2)$.

ث) پنج وجه‌ی دیگر:

- $z=-2, 1\le x\le 3, 1\le y\le 4$
- $x=1, 1\le y\le 4, -2\le z\le 2$
- $x=3, 1\le y\le 4, -2\le z\le 2$
- $y=1, 1\le x\le 3, -2\le z\le 2$
- $y=4, 1\le x\le 3, -2\le z\le 2$

ج) نقطه‌ی درونی (همه‌ی نابرابری‌ها اکید): $(2, 2, 0)$. نقطه‌ای روی یک وجه و غیر واقع بر یال‌ها: $(2, 2, 2)$ (روی وجه $z=2$).

چ) نقطه‌ی (x, y, z) درون مکعب است اگر $-2<z<2$, $1<y<4$, $1<x<3$ و روی یکی از وجه‌ها است اگر در $-2\le z\le 2$, $1\le y\le 4$, $1\le x\le 3$ صدق کند و دست‌کم در یکی از این شش نابرابری، تساوی برقرار باشد. بنابراین شرط «درون یا روی یکی از وجه‌ها»: $-2\le z\le 2$, $1\le y\le 4$, $1\le x\le 3$.

ح) حجم محدود شده (درون و روی سطح): $-2\le z\le 2$, $1\le y\le 4$, $1\le x\le 3$. (حجم آن $2\times 3\times 4=24$ است.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۶ صفحه ۷۰ پرسش

به نظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

چون $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$، برای رسم تفاضل ابتدا قرینه‌ی $\vec{b}$ یعنی $-\vec{b}$ (هم‌اندازه با $\vec{b}$ و در خلاف جهت آن) را رسم می‌کنیم، سپس با روش متوازی‌الاضلاع (یا با گذاشتن ابتدای $-\vec{b}$ روی انتهای $\vec{a}$) $\vec{a}$ و $-\vec{b}$ را جمع می‌کنیم.

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ابتدای یکسان داشته باشند، $\vec{a}-\vec{b}$ برداری است که از **انتهای b** به **انتهای a** رسم می‌شود؛ یعنی قطر دیگر متوازی‌الاضلاعی که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌سازند. (زیرا $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$)

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۷ صفحه ۷۳ کار در کلاس

۱ـ در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده‌است.

الف) مختصات بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه‌ی بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{b}$ را رسم کرده و مختصات آن‌ها را به‌دست آورید.

ج) مؤلفه‌های بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را یافته، آن‌ها را رسم کنید و اندازه‌ی هر یک را به‌دست آورید.

د) هریک از بردارهای $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{d}-\vec{c}$ را برحسب بردارهای واحد $\vec{i},\vec{j}$ به‌دست آورید.

از روی شکل: $\vec{a}=(۳/۵,\ ۲),\ \vec{b}=(-۱,\ ۲),\ \vec{c}=(-۲,\ -۳),\ \vec{d}=(۲,\ -۳)$

الف) $\vec{a}+\vec{b}=(۳/۵-۱,\ ۲+۲)=(۲/۵,\ ۴)$

ب) $-\vec{b}=(۱,\ -۲)$ $\qquad -\vec{c}=(۲,\ ۳),$

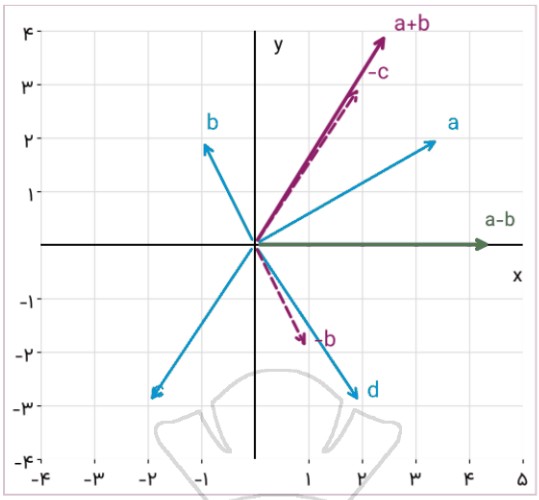
ج) $|\vec{a}-\vec{b}|=۴/۵$ $\qquad \vec{a}-\vec{b}=(۳/۵+۱,\ ۲-۲)=(۴/۵,\ ۰),$

$|\vec{d}-\vec{c}|=۴$ $\qquad \vec{d}-\vec{c}=(۲+۲,\ -۳+۳)=(۴,\ ۰),$

د)

- $\vec{a}=۳/۵\vec{i}+۲\vec{j},\quad \vec{b}=-\vec{i}+۲\vec{j}$

- $\vec{c} = -۲\vec{i} - ۳\vec{j}, \quad \vec{d} = ۲\vec{i} - ۳\vec{j}$
- $\vec{a} + \vec{b} = ۲/۵\vec{i} + ۴\vec{j}$
- $\vec{a} - \vec{b} = ۴/۵\vec{i}, \quad \vec{d} - \vec{c} = ۴\vec{i}$



(در شکل، بردارهای خط‌چین قرینه‌ی $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و بردار سبز $\vec{a} - \vec{b}$ است.)

۸ صفحه ۷۴ — پرسش

آیا راستای $r\vec{a}$ و $\vec{a}$ با هم متفاوت‌اند؟

خیر؛ $r\vec{a} = (ra_۱, ra_۲, ra_۳)$ مضربی از $\vec{a}$ است، پس دو بردار موازی‌اند و راستای یکسان دارند. (برای $r > ۱$ هم‌جهت‌اند و $r\vec{a}$ بلندتر است.)

۹ صفحه ۷۴ — پرسش

بردار $-\vec{a} = (-a_۱, -a_۲, -a_۳)$ هم اندازه با $\vec{a}$ (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می‌باشد.

$|-\vec{a}| = \sqrt{(-a_۱)^۲ + (-a_۲)^۲ + (-a_۳)^۲} = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲} = |\vec{a}|$ زیرا مربع هر عدد با مربع قرینه‌ی آن برابر است؛ ولی چون $-\vec{a} = (-۱)\vec{a}$ ضریب منفی دارد، خلاف جهت $\vec{a}$ است.

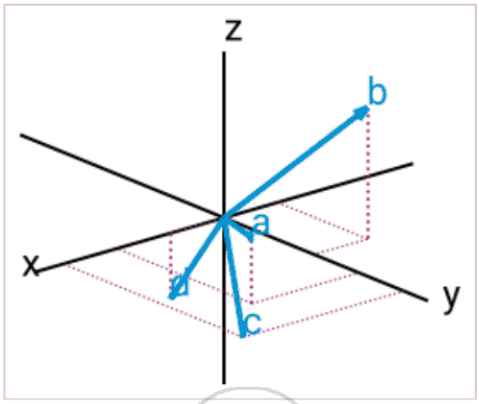
۱۰ صفحه ۷۴ — کار در کلاس

نقاط $A = (۲,۳,۱)$ ، $B = (-۱,۲,۲)$ ، $C = (۳,۴,۰)$ و $D = (۱,۰,-۱)$ را در یک دستگاه $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید. اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ بردارهایی در $\mathbb{R}^۳$ با نقاط انتهایی A,B,C,D به ترتیب باشند آنگاه آن‌ها را در دستگاه فوق نشان دهید و هریک از بردارهای زیر را به‌دست آورید.

ایران توشه
irantooshe.ir

$-2\vec{b} - 2\vec{c} = -2(\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + 2\vec{b} =$

$\vec{a} = (2, 3, 1),\ \vec{b} = (-1, 2, 2),\ \vec{c} = (3, 4, 0),\ \vec{d} = (1, 0, -1)$ (هر بردار از مبدأ به نقطه‌ی مربوط رسم می‌شود).



- $\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 3, 1) + (-2, 4, 4) = (0, 7, 5)$
- $\vec{b} + \vec{c} = (2, 6, 2) \Rightarrow \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (4, 9, 3)$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (1, 5, 3) + (3, 4, 0) = (4, 9, 3)$ (برابر حالت قبل: خاصیت شرکت‌پذیری)
- $-2(\vec{b} + \vec{c}) = -2(2, 6, 2) = (-4, -12, -4)$
- $-2\vec{b} - 2\vec{c} = (2, -4, -4) + (-6, -8, 0) = (-4, -12, -4)$ (برابر حالت قبل: خاصیت پخشی)

۱۱ صفحه ۷۶ تمرین

۱ـ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی ABCD را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح ABCD هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

از شکل: $A = (2, 1, 3),\ B = (-1, 1, 3),\ C = (2, -1, 3),\ D = (-3, -1, 3)$. هر چهار نقطه در صفحه‌ی $z=3$ قرار دارند و چهارضلعی یک ذوزنقه است ($AB \parallel CD$، هر دو افقی) با رأس‌ها به ترتیب A, B, D, C.

ساق چپ BD روی خط $x-y=-2$ و ساق راست AC روی خط $x=2$ است؛ قاعده‌ها روی $y=1$ و $y=-1$ قرار دارند.

الف) $-2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1,\ z=3$

(مساحت: $\frac{3+5}{2} \times 2 = 8$.)

ب) انتقال سطح در راستای محور z: مثلاً $-2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1,\ z=0$ (یا $z=5$) که هم‌مساحت و موازی سطح ABCD است.

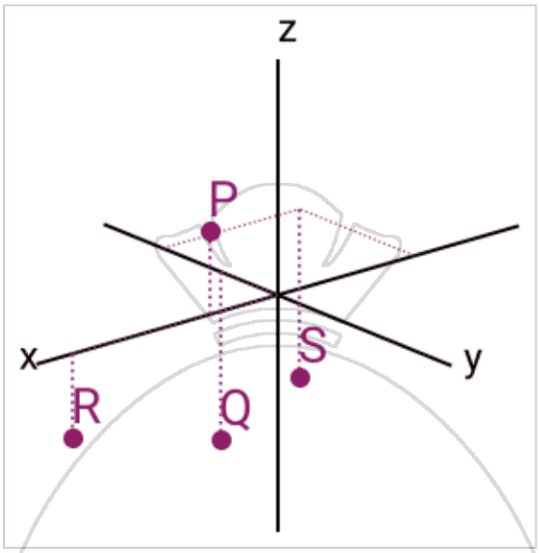
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۷۶ تمرین

۲ـ نقاط با مختصات R=(۳,۰,-۱) ، Q=(۰,-۱,-۲) ، P=(۱,۰,۱) و S=(-۲,-۲,-۲) را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

هر نقطه را ابتدا در صفحه‌ی xy با دو مؤلفه‌ی اول مشخص و سپس به اندازه‌ی مؤلفه‌ی سوم در راستای محور z بالا یا پایین می‌بریم:



۱۳ صفحه ۷۶ تمرین

۳ـ در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

$$PQ = \sqrt{(۰-۱)^۲ + (-۱-۰)^۲ + (-۲-۱)^۲} = \sqrt{۱+۱+۹} = \sqrt{۱۱}$$

$$RQ = \sqrt{(۰-۳)^۲ + (-۱-۰)^۲ + (-۲+۱)^۲} = \sqrt{۹+۱+۱} = \sqrt{۱۱}$$

$$PS = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (-۲-۰)^۲ + (-۲-۱)^۲} = \sqrt{۹+۴+۹} = \sqrt{۲۲}$$

۱۴ صفحه ۷۶ تمرین

۴ـ فرض کنید $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$. مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط PQ را بیابید.

چون $\overrightarrow{PM} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{PQ}$، $M - P = \frac{۱}{۲}(Q - P)$ و در نتیجه $M = \frac{P+Q}{۲}$:

$$M = \left(\frac{x_۰+x_۱}{۲}, \frac{y_۰+y_۱}{۲}, \frac{z_۰+z_۱}{۲}\right)$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵ صفحه ۷۶ تمرین

۵ـ در کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{۱}{۳},۰,۲),\ \vec{b}=(\sqrt{۲},۱,۱),\ r=۳,\quad r\vec{a}-\vec{b}=?$

ب) $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=(۳,۱,-۱),\ r=-۱,\quad r\vec{a}+\vec{b}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{۲}\,\vec{i}-\vec{k},\ \vec{b}=۳\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{a}+\vec{b}=?$

د) $\vec{a}=۵\vec{k}+\vec{j},\ \vec{b}=-\vec{k}+\vec{i},\ r=\frac{۱}{۵},\quad r\vec{a}+\vec{b}=?$

الف) $۳\vec{a}=(-۱,۰,۶)\Rightarrow ۳\vec{a}-\vec{b}=(-۱-\sqrt{۲},\ -۱,\ ۵)$

ب) $\vec{a}=(۳,۲,-۱)\Rightarrow -\vec{a}+\vec{b}=(-۳+۳,\ -۲+۱,\ ۱-۱)=(۰,\ -۱,\ ۰)=-\vec{j}$

ج) $\vec{a}=(\sqrt{۲},۰,-۱),\ \vec{b}=(۰,۳,۱)\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(\sqrt{۲},\ ۳,\ ۰)=\sqrt{۲}\,\vec{i}+۳\vec{j}$

د) $\vec{a}=(۰,۱,۵),\ \vec{b}=(۱,۰,-۱)\Rightarrow \frac{۱}{۵}\vec{a}+\vec{b}=(۰,\frac{۱}{۵},۱)+(۱,۰,-۱)=(۱,\ \frac{۱}{۵},\ ۰)=\vec{i}+\frac{۱}{۵}\vec{j}$

۱۶ صفحه ۷۶ تمرین

۶ـ طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

الف) $|\vec{a}|=\sqrt{\frac{۱}{۹}+۰+۴}=\sqrt{\frac{۳۷}{۹}}=\frac{\sqrt{۳۷}}{۳}$

ب) $|\vec{a}|=\sqrt{۹+۴+۱}=\sqrt{۱۴}$

ج) $|\vec{a}|=\sqrt{۲+۰+۱}=\sqrt{۳}$

د) $|\vec{a}|=\sqrt{۰+۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}$

۱۷ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۱ـ تصویر بردار $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ بر امتداد بردار $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ را بیابید.

$\vec{i}\cdot\vec{j}=۱\times۰+۰\times۱+۰\times۰=۰,\qquad |\vec{j}|^{۲}=۱$

$\vec{O}=(۰,۰,۰)=۰\cdot\vec{j}=\frac{\vec{i}\cdot\vec{j}}{|\vec{j}|^{۲}}\vec{j}=\vec{i}'$ (تصویر، بردار صفر است؛ زیرا $\vec{j}\perp\vec{i}$.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۲ـ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می‌شود.

اگر $\vec{a} \perp \vec{b}$ آنگاه $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. پس

$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \vec{O}$ و $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{0}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \vec{O}$ ∎ (فرض: دو بردار ناصفرند.)

۱۹ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۳ـ نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

چون دو بردار (ناصفر) هم‌راستایند، عدد حقیقی ناصفر k هست که $\vec{b} = k\vec{a}$. آنگاه $\vec{a} \cdot \vec{b} = k|\vec{a}|^2$ و

$|\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2$ و

$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{k|\vec{a}|^2}{k^2|\vec{a}|^2} (k\vec{a}) = \vec{a}$ ∎

۲۰ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۴ـ هر یک از حالات زیر را با شکل‌های داده شده نظیر کنید.

الف) $a.b > 0$

ب) $a.b = 0$

پ) $a.b < 0$

ت) $a.b = |a||b|$

ج) $a.b = -|a||b|$

شکل‌ها از راست به چپ مربوط به $\theta=0$، $0<\theta<\pi/2$، $\theta=\pi/2$، $\pi/2<\theta<\pi$ و $\theta=\pi$ هستند. از رابطه‌ی $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ و علامت $\cos\theta$:

- الف) $a.b > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0$ ⇔ زاویه‌ی تند: شکل با $0<\theta<\pi/2$ (شکل دوم از راست)
- ب) $a.b = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta=\pi/2$: شکل سوم از راست (دو بردار عمود)
- پ) $a.b < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0$ ⇔ زاویه‌ی باز: شکل با $\pi/2<\theta<\pi$ (شکل چهارم از راست)
- ت) $a.b = |a||b| \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta=0$: شکل اول از راست (هم‌جهت)
- ج) $a.b = -|a||b| \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta=\pi$: شکل پنجم از راست (خلاف جهت)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ صفحه ۸۳ — پرسش

اگر $K = 0$ در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حجم متوازی‌السطوح تولیدشده با سه بردار برابر $V = |K| = 0$ است؛ یعنی متوازی‌السطوح «تخت» شده و سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ **در یک صفحه‌اند (هم‌صفحه‌اند)**. (به‌طور معادل: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ و دترمینان سه بردار صفر است.)

۲۲ صفحه ۸۴ — تمرین

۱ـ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $a = (2,-1,2)$ ، $b = i$

ب) $a = (2,3,1)$ ، $b = (3,2,1)$

ج) $a = (1,1,0)$ ، $b = (-1,2,4)$

از فرمول $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ استفاده می‌کنیم.

الف) $\vec{a} \cdot \vec{i} = 2,\ |\vec{i}|^2 = 1 \Rightarrow \vec{a}' = 2(1,0,0) = (2,\ 0,\ 0)$

ب) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 6 + 1 = 13,\ |\vec{b}|^2 = 9 + 4 + 1 = 14 \Rightarrow \vec{a}' = \frac{13}{14}(3,2,1) = \left(\frac{39}{14},\ \frac{13}{7},\ \frac{13}{14}\right)$

ج) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 2 + 0 = 1,\ |\vec{b}|^2 = 1 + 4 + 16 = 21 \Rightarrow \vec{a}' = \frac{1}{21}(-1,2,4) = \left(-\frac{1}{21},\ \frac{2}{21},\ \frac{4}{21}\right)$

۲۳ صفحه ۸۴ — تمرین

۲ـ فرض کنید $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

دو طرف تساوی $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ را در خودش ضرب داخلی می‌کنیم:

$$0 = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 14 + 2S$$

$$S = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -7$$

۲۴ صفحه ۸۴ — تمرین

۳ـ سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آن‌ها $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

$$\vec{a} = (1,0,0),\ \vec{b} = (0,1,0),\ \vec{c} = (0,2,0)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0=\vec{a}\cdot\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. (در حالت کلی $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ فقط می‌گوید $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ عمود است؛ پس حذف $\vec{a}$ مجاز نیست.)

---

۲۵ صفحه ۸۴ — تمرین

۴ـ اگر $b=(3,-4,2)$ ، $a=(1,-3,4)$ و $c=(-1,1,4)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

$$\vec{b}+\vec{c}=(2,\ -3,\ 6),\quad |\vec{b}+\vec{c}|^2=4+9+36=49$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=2+9+24=35$$

$$\vec{a}'=\frac{35}{49}(2,\ -3,6)=\frac{5}{7}(2,\ -3,6)=\left(\frac{10}{7},\ -\frac{15}{7},\ \frac{30}{7}\right)$$

---

۲۶ صفحه ۸۴ — تمرین

۵ـ برداری عمود بر دو $a=(1,-3,2)$, $b=(-2,1,-5)$ بردار پیدا کنید.

ضرب خارجی دو بردار بر هر دو عمود است:

$$\vec{a}\times\vec{b}=((-3)(-5)-2\cdot1,\ 2\cdot(-2)-1\cdot(-5),\ 1\cdot1-(-3)(-2))=(13,\ 1,\ -5)$$

بررسی: $(13,1,-5)\cdot\vec{a}=13-3-10=0$ و $(13,1,-5)\cdot\vec{b}=-26+1+25=0$. هر مضرب ناصفر این بردار نیز جواب است.

---

۲۷ صفحه ۸۴ — تمرین

۶ـ سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آن‌ها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

$$\vec{a}=(1,0,0),\ \vec{b}=(0,1,0),\ \vec{c}=(2,1,0)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,1)=\vec{a}\times\vec{c}\quad\text{ولی}\quad\vec{b}\neq\vec{c}$$

بحث: از $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ نتیجه می‌شود $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$، یعنی فقط $\vec{a}$ با $\vec{b}-\vec{c}$ موازی است (در مثال بالا $\vec{a}\parallel(-2,0,0)=\vec{b}-\vec{c}$). پس **حذف در ضرب خارجی برقرار نیست** (در ضرب داخلی نیز برقرار نبود).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۸ صفحه ۸۴ تمرین

۷ـ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|b| = ۲۶$, $|a| = ۳$ و $|a\times b| = ۷۲$. مقدار a.b را محاسبه کنید.

از اتحاد $|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲ = |\vec{a}\times\vec{b}|^۲ + (\vec{a}\cdot\vec{b})^۲$ (زیرا $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$):

$$۷۲^۲ + (\vec{a}\cdot\vec{b})^۲ = ۳^۲ \times ۲۶^۲ \Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})^۲ = ۶۰۸۴ - ۵۱۸۴ = ۹۰۰$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm ۳۰$ (علامت به زاویه‌ی بین دو بردار بستگی دارد: ۳۰+ برای زاویه‌ی تند و ۳۰- برای زاویه‌ی باز).

۲۹ صفحه ۸۴ تمرین

۸ـ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (۳,۵,۷)$, $B = (۵,۵,۰)$, $C = (-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

مساحت مثلث نصف مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده بر دو ضلع است:

$$\overrightarrow{AB} = (۲,\ ۰,\ -۷), \qquad \overrightarrow{AC} = (-۷,\ -۵,\ -۳)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (۰\cdot(-۳) - (-۷)(-۵),\ (-۷)(-۷) - ۲\cdot(-۳),\ ۲\cdot(-۵) - ۰) = (-۳۵,\ ۵۵,\ -۱۰)$$

$$S = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۵^۲ + ۵۵^۲ + ۱۰^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۳۵۰} = \frac{۵\sqrt{۱۷۴}}{۲} \approx ۳۲/۹۸$$

۳۰ صفحه ۸۶ مجله ریاضی

مثال ۵ : ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. ... اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.

در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$، پس $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$ و از جمع دو تساوی‌ی کتاب (استدلال ناتمام) نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

O محل برخورد قطرهای AC و BD است؛ پس $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ برداری در امتداد AC و $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ برداری در امتداد BD است. این دو بردار برابرند ولی دو امتداد AC و BD موازی نیستند؛ بنابراین هر دو بردار صفرند:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}, \qquad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$$

یعنی O وسط AC و وسط BD است؛ قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند ∎

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir