با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام هندسه (۳) دوازدهم
فصل دوم

عنوان فصل: آشنایی با مقاطع مخروطی

از صفحه‌ی ۳۳ تا صفحه‌ی ۶۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل آشنایی با مقاطع مخروطی آمده است.

مباحث فصل: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی، دایره، بیضی و سهمی

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۳۴ · پرسش — فصل مشترک صفحه و کره ۷

۲ صفحه ۳۵ · پرسش — فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی در یک نقطه ۷

۳ صفحه ۳۶ · فعالیت — فعالیت ۱ - نیمساز زاویه ۷

۴ صفحه ۳۷ · فعالیت — فعالیت ۲ - دایره به عنوان مکان هندسی ۸

۵ صفحه ۳۷ · فعالیت — فعالیت ۳ - مکان هندسی نقاط هم‌فاصله از یک خط ۸

۶ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۱ - مکان هندسی ۹

۷ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۲ ..... ۱۰

۸ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۳ ..... ۱۰

۹ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۴ ..... ۱۰

۱۰ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۵ ..... ۱۱

۱۱ صفحه ۳۹ · تمرین — تمرین ۶ - مقطع سطح استوانه‌ای ۱۱

۱۲ صفحه ۴۱ · فعالیت — فعالیت ۱ - معادله‌ی ضمنی دایره ۱۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۴۲ · پرسش — چرا؟ - حالت‌های معادله‌ی ضمنی ۱۲

۱۴ صفحه ۴۲ · کار در کلاس — کار در کلاس - معادله‌ی دایره ۱۲

۱۵ صفحه ۴۳ · فعالیت — فعالیت ۲ - دایره‌ی مماس بر خط ۱۳

۱۶ صفحه ۴۳ · کار در کلاس — کار در کلاس - وتر مشخص ۱۴

۱۷ صفحه ۴۴ · فعالیت — فعالیت ۳ - دایره‌ی مماس داخل ۱۴

۱۸ صفحه ۴۴ · کار در کلاس — کار در کلاس - وضعیت دو دایره ۱۵

۱۹ صفحه ۴۵ · فعالیت — فعالیت ۴ - وضعیت خط و دایره ۱۶

۲۰ صفحه ۴۵ · سؤال — سؤال - علامت Δ ۱۷

۲۱ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۱ - نوشتن معادله‌ی دایره ۱۷

۲۲ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۲ ۱۸

۲۳ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۳ ۱۸

۲۴ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۴ - وضعیت دو دایره ۱۸

۲۵ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۵ - دایره‌ی محیطی مثلث ۱۹

۲۶ صفحه ۴۶ · تمرین — تمرین ۶ - وضعیت خط و دایره ۱۹

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۴۷ · فعالیت — فعالیت ۱ – تعریف بیضی ۲۰

۲۸ صفحه ۴۸ · فعالیت — فعالیت ۲ – قطرها و کانون‌های بیضی ۲۱

۲۹ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — کار در کلاس – مختصات نقطه‌ی D ۲۲

۳۰ صفحه ۴۹ · فعالیت — فعالیت ۳ – کشیدگی بیضی ۲۲

۳۱ صفحه ۴۹ · پرسش — چرا؟ – c/a = 1 و c/a = 0 ۲۳

۳۲ صفحه ۵۰ · فعالیت — فعالیت ۴ – مماس بر بیضی و بازتاب ۲۴

۳۳ صفحه ۵۰ · فعالیت — فعالیت ۵ – نقاط هم‌فاصله از خط و نقطه ۲۴

۳۴ صفحه ۵۰ · فعالیت — ادامه‌ی فعالیت ۵ – ابزار گونیا و نخ ۲۵

۳۵ صفحه ۵۱ · فعالیت — فعالیت ۶ – معادله‌ی سهمی ۲۵

۳۶ صفحه ۵۳ · پرسش — چرا؟ – مثال سهمی با رأس A(2,1) و کانون F(2,5) ۲۶

۳۷ صفحه ۵۴ · پرسش — چرا؟ – مثال سهمی با رأس A(4,6) و خط هادی x=9 ۲۷

۳۸ صفحه ۵۵ · پرسش — چرا؟ – نقاط B و B′ بر سهمی ۲۷

۳۹ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۱ – کانون‌ها و نقاط بیضی ۲۷

۴۰ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۲ – دایره‌ی کمکی ۲۸

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۱ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۳ – مماس و خط موازی ۲۸

۴۲ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۴ – نقطه‌ای روی بیضی ۲۸

۴۳ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۵ – زاویه‌ی FBF′ ۲۹

۴۴ صفحه ۵۷ · تمرین — تمرین ۶ – نسبت AD/AF ۲۹

۴۵ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۷ ۳۰

۴۶ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۸ ۳۰

۴۷ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۹ ۳۱

۴۸ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۰ ۳۱

۴۹ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۱ ۳۱

۵۰ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۲ ۳۲

۵۱ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۳ – دیش ماهواره‌ای ۳۲

۵۲ صفحه ۵۸ · تمرین — تمرین ۱۴ – رسم مثلث با خواص بیضی ۳۳

۵۳ صفحه ۵۹ · تمرین — تمرین ۱۵ – وسط وترهای موازی سهمی ۳۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱ صفحه ۳۴ پرسش

به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می‌تواند باشد؟

فرض کنیم کره‌ای به مرکز O و شعاع R و صفحه‌ای به فاصله‌ی h از O داشته باشیم. سه حالت پیش می‌آید:

- اگر $h<R$ باشد، فصل مشترک یک **دایره** است که مرکز آن پای عمود وارد از O بر صفحه و شعاعش $\sqrt{R^2-h^2}$ است.
- اگر $h=R$ باشد (صفحه بر کره مماس است)، فصل مشترک فقط **یک نقطه** است.
- اگر $h>R$ باشد، صفحه و کره نقطه‌ی مشترکی ندارند و فصل مشترک تهی است.

پس شکل معمول فصل مشترک یک صفحه و یک کره، دایره است.

۲ صفحه ۳۵ پرسش

در چه حالتی فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی تنها نقطه‌ی A خواهد بود؟

هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس A عبور کند، فصل مشترک فقط خود نقطه‌ی A است؛ زیرا هر صفحه‌ی عمود بر محور، سطح مخروطی را در یک دایره قطع می‌کند و هرچه صفحه به رأس نزدیک‌تر شود شعاع این دایره کوچک‌تر می‌شود تا وقتی که صفحه از رأس بگذرد و شعاع صفر شود.

(به‌طور کلی هر صفحه‌ی گذرا از رأس که هیچ مولدی را در بر نداشته باشد و زاویه‌اش با محور از زاویه‌ی مولد با محور بزرگ‌تر باشد نیز سطح مخروطی را فقط در A قطع می‌کند.)

۳ صفحه ۳۶ فعالیت

۱ـ در کتاب هندسه‌ی ۱ با ویژگی‌ها و طریقه‌ی رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه‌ی مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

۱ـ هر نقطه روی نیمساز زاویه .....

۲ـ هر نقطه که ..... روی نیمساز زاویه است.

اکنون گزاره‌ی زیر را کامل کنید: یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر از ..... $M\in Oz$ $(\hat{O}_1=\hat{O}_2)$ ..... ⇔

بنابراین می‌توان گفت: نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

1. هر نقطه روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
2. هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه است.

گزاره‌ی کامل‌شده: یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر از **دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.**

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$M \in Oz \Leftrightarrow MH=MH' \quad (\hat{O}_1=\hat{O}_2)$ (یعنی فاصله‌ی M از Ox برابر فاصله‌ی M از Oy است).

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله‌اند.

۴ صفحه ۳۷ فعالیت

دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطه‌ی دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟

ب) اگر B، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله‌ی r باشد (OB=r) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید: $A \in C \Leftrightarrow OA=r$

نتیجه: نقطه‌ی A روی دایره‌ی C(O,r) است، اگر و فقط اگر .....

نتیجه: دایره‌ی C(O,r) مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

الف) طبق تعریف دایره، همه‌ی نقاط آن از مرکز به یک فاصله‌ی ثابت یعنی شعاع‌اند؛ پس OA=r.

ب) فرض می‌کنیم OB=r ولی B روی دایره نیست. نیم‌خط OB دایره را در نقطه‌ای مانند B' قطع می‌کند و طبق (الف) $OB'=r$. چون B و B' هر دو روی یک نیم‌خط به مبدأ O هستند و $B \neq B'$ ، فاصله‌ی آن‌ها از O نمی‌تواند برابر باشد؛ یعنی $OB \neq OB'=r$ که با فرض OB=r تناقض دارد. پس B همان B' و روی دایره است.

از (الف) و (ب): $A \in C \Rightarrow OA=r$ و $OA=r \Rightarrow A \in C$ ، یعنی $A \in C \Leftrightarrow OA=r$.

نقطه‌ی A روی دایره‌ی C(O,r) است، اگر و فقط اگر فاصله‌ی A از O برابر r باشد (OA=r).

دایره‌ی C(O,r) مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ی ثابت O به فاصله‌ی r قرار دارند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت
این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵ صفحه ۳۷ فعالیت

دو خط موازی d و d' را که فاصله‌ی آن‌ها از هم ۲ سانتی‌متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d'، از خط d فاصله‌ی یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند و روی d' نباشند؟ همه‌ی نقاطی که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

آیا گزاره‌ی زیر درست است؟ «یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.»

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشد.»

بله. اگر AH و BH' عمودهای وارد از A و B بر d باشند، چون $d \parallel d'$ ، چهارضلعی $AHH'B$ مستطیل است و $AH=BH'$؛ پس همه‌ی نقاط d' از d به یک فاصله‌اند و این فاصله ۲ سانتی‌متر است.

بله، همه‌ی نقاط خط d'' که در طرف دیگر d و موازی با آن، به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از d است نیز چنین‌اند و روی d' نیستند. بنابراین نقاطی که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر قرار دارند روی **دو خط موازی با d** (در دو طرف آن) قرار می‌گیرند.

گزاره‌ی دوم درست است: هر نقطه‌ی روی d' یا d'' فاصله‌اش از d برابر ۲ است، و برعکس نقطه‌ای که فاصله‌اش از d برابر ۲ باشد، در یکی از دو طرف d است و روی خط موازی d در همان طرف و به فاصله‌ی ۲ قرار می‌گیرد؛ پس روی d' یا d'' است. در نتیجه نتیجه‌گیری سوم هم درست است.

۶ صفحه ۳۹ تمرین

۱ـ مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند.

پ) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی C(O,r) در صفحه‌ی این دایره مماس خارجی‌اند.

الف) نقاط هم‌فاصله از دو ضلع یک زاویه روی نیمساز آن زاویه‌اند. دو خط متقاطع چهار زاویه می‌سازند که نیمسازهای آن‌ها دو خط راست‌اند؛ پس مکان هندسی، **دو خط عمود بر هم** (نیمسازهای زاویه‌های بین d و d') است که از نقطه‌ی تلاقی d و d' می‌گذرند.

ب) اگر دایره در A بر d مماس باشد، شعاع در نقطه‌ی تماس بر d عمود است؛ پس مرکز روی عمود بر d در نقطه‌ی A قرار دارد و هر نقطه‌ی این عمود (به جز خود A) مرکز چنین دایره‌ای است. مکان هندسی: **خط عمود بر d در نقطه‌ی A به جز نقطه‌ی A**.

پ) دایره بر d مماس است اگر و تنها اگر فاصله‌ی مرکز از d برابر شعاع r باشد. پس مکان هندسی، **دو خط موازی d** است که در دو طرف d به فاصله‌ی r از آن قرار دارند.

ت) دو دایره مماس خارج‌اند اگر و تنها اگر فاصله‌ی مرکزهایشان برابر مجموع شعاع‌ها باشد. اینجا $۲r = r + r$؛ پس مرکز دایره‌ی متغیر از O به فاصله‌ی ثابت $۲r$ است. مکان هندسی: **دایره‌ای به مرکز O و شعاع $۲r$**. (اگر شعاع دایره‌ی متغیر r' بود، شعاع این دایره $r+r'$ می‌شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷ صفحه ۳۹ تمرین

۲ـ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

مکان نقاط هم‌فاصله از A و B، خط l_1 (عمودمنصف AB) و مکان نقاط هم‌فاصله از C و D، خط l_2 (عمودمنصف CD) است. نقطه‌ی خواسته شده، محل برخورد l_1 و l_2 است. چون $l_1 \perp AB$ و $l_2 \perp CD$ ، وضع این دو خط به وضع AB و CD بستگی دارد:

- اگر AB و CD موازی نباشند، l_1 و l_2 متقاطع‌اند و مسئله **دقیقاً یک جواب** دارد.
- اگر $AB \parallel CD$ باشد و l_1 و l_2 بر هم منطبق نباشند (مثلاً وقتی وسط‌های AB و CD روی یک خط عمود بر آن‌ها قرار ندارند)، دو خط موازی و متمایزند و مسئله **جواب ندارد**.
- اگر $AB \parallel CD$ باشد و l_1 و l_2 بر هم منطبق شوند (مانند رأس‌های یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین)، همه‌ی نقاط این خط جواب‌اند و مسئله **بی‌شمار جواب** دارد.

۸ صفحه ۳۹ تمرین

۳ـ نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

مکان نقاط هم‌فاصله از A و B، عمودمنصف l از پاره‌خط AB و مکان نقاطی که از C به فاصله‌ی ۳ هستند، دایره‌ی C(C,۳) است. جواب‌ها نقاط برخورد l و این دایره‌اند. اگر فاصله‌ی C از l را h بنامیم:

- اگر $h<3$: خط دایره را در **دو نقطه** قطع می‌کند؛ مسئله دو جواب دارد.
- اگر $h=3$: خط بر دایره مماس است؛ **یک جواب**.
- اگر $h>3$: خط و دایره برخورد ندارند؛ **مسئله جواب ندارد**.

۹ صفحه ۳۹ تمرین

۴ـ نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

مکان نقاطی که از A به فاصله‌ی ۲ هستند، دایره‌ی C(A,۲) و مکان نقاطی که از d به فاصله‌ی ۳ هستند، دو خط d_1 و d_2 موازی d در دو طرف آن و به فاصله‌ی ۳ از آن است. جواب‌ها محل برخورد دایره با این دو خط‌اند.

irantooshe.ir

فرض کنیم فاصله‌ی A از d برابر h باشد و d_1 خطی باشد که در همان طرفِ A قرار دارد. فاصله‌ی A از d_1 برابر $|h-3|$ و از d_2 برابر $h+3\geq 3$ است. چون $h+3>2$، دایره هرگز d_2 را قطع نمی‌کند و فقط d_1 اهمیت دارد:

- اگر $1<h<5$ (یعنی $|h-3|<2$): دایره d_1 را در **دو نقطه** قطع می‌کند؛ دو جواب.
- اگر $h=1$ یا $h=5$ (یعنی $|h-3|=2$): دایره بر d_1 مماس است؛ **یک جواب**.
- اگر $h<1$ یا $h>5$ (یعنی $|h-3|>2$): **جواب ندارد**.

۱۰ صفحه ۳۹ تمرین

۵ـ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

صفحه‌ی شامل محور از رأس A می‌گذرد و دو مولد متقارن نسبت به محور را در بر دارد؛ بنابراین فصل مشترک آن با سطح مخروطی **دو خط متقاطع** (دو مولد گذرنده از رأس A) است که نسبت به محور متقارن‌اند. (یعنی حالت تبهگون که همان دو خط متقاطع است.)

۱۱ صفحه ۳۹ تمرین

۶ـ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

فرض کنیم شعاع استوانه r باشد (فاصله‌ی d از محور l):

1. اگر P بر محور l **عمود** باشد: مقطع یک **دایره** به شعاع r است.
2. اگر P نه بر محور عمود و نه با آن موازی باشد (محور را مایل قطع کند): مقطع یک **بیضی** است.
3. اگر P با محور l **موازی** باشد و فاصله‌اش از محور کمتر از r باشد: مقطع **دو خط موازی** (دو مولد استوانه) است.
4. اگر P با محور موازی باشد و فاصله‌اش از محور برابر r باشد: صفحه بر استوانه مماس است و مقطع **یک خط** (یک مولد) است. (اگر فاصله بیشتر از r باشد، مقطع تهی است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲ صفحه ۴۱ فعالیت

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\cdots-\cdots)+c=0\Rightarrow$$

$$(x+\cdots)^2+(y+\cdots)^2-\cdots-\cdots+c=0\Rightarrow (x+\cdots)^2+(y+\cdots)^2=\frac{\cdots\cdots}{4}\Rightarrow O(\cdots,\cdots),\ r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای درباره‌ی c، b، a به‌دست می‌آید؟

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4})+c=0\Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

$$\Rightarrow O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right),\quad r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

چون طول شعاع باید عددی حقیقی (و مثبت) باشد، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد: $a^2+b^2-4c\geq 0$ (یا $a^2+b^2\geq 4c$). برای آن‌که معادله دایره‌ای واقعی با شعاع مثبت باشد باید $a^2+b^2-4c>0$ برقرار باشد.

۱۳ صفحه ۴۲ پرسش

رابطه‌ی ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله‌ی یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد و اگر $a^2+b^2<4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2+b^2=4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

معادله با تبدیل به مربع کامل به صورت $(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$ درمی‌آید. سمت چپ مجموع دو مربع و همواره نامنفی است.

- اگر $a^2+b^2-4c<0$، سمت راست منفی است و هیچ زوج حقیقی (x,y) در معادله صدق نمی‌کند؛ پس هیچ نقطه‌ای مشخص نمی‌شود.
- اگر $a^2+b^2-4c=0$، سمت راست صفر است و مجموع دو مربع فقط وقتی صفر است که هر دو صفر باشند: $x=-a/2$ و $y=-b/2$؛ پس فقط یک نقطه مشخص می‌شود.
- اگر $a^2+b^2-4c>0$، سمت راست برابر مربع عدد مثبتی (r^2) است و معادله‌ی استاندارد دایره‌ای به شعاع r می‌شود.

۱۴ صفحه ۴۲ کار در کلاس

۱ـ معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) و شعاع آن ۳ واحد باشد.

۲ـ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳ـ کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله‌ی یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به‌دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y - ۱ = ۰$

ب) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۳y + ۴ = ۰$

ج) $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + ۴y - ۲ = ۰$

۱) $(x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۳^۲ \Rightarrow x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۹$ $(x^۲ + y^۲ - ۲y - ۸ = ۰)$

۲) $(x - ۰)^۲ + (y - ۰)^۲ = r^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = r^۲$

۳) الف) $a = -۲,\ b = -۶,\ c = -۱:\ a^۲ + b^۲ - ۴c = ۴ + ۳۶ + ۴ = ۴۴ > ۰$

پس معادله‌ی یک دایره است: $r = \sqrt{۱۱},\ O'(۱, ۳) \Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۱۱$

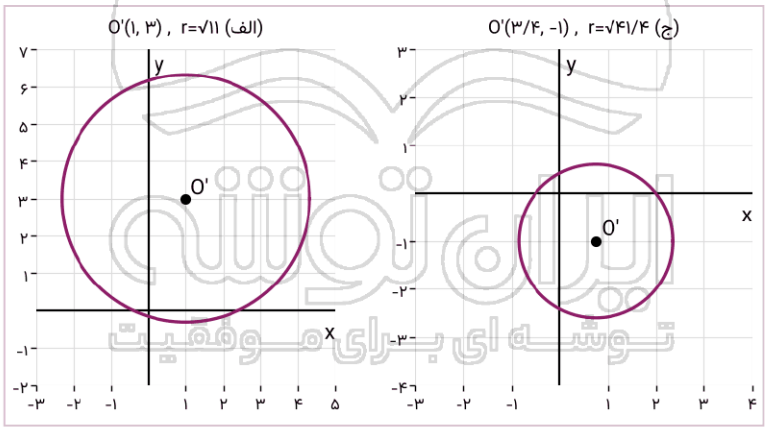
ب) $a = ۲,\ b = ۳,\ c = ۴:\ a^۲ + b^۲ - ۴c = ۴ + ۹ - ۱۶ = -۳ < ۰$

مقدار منفی است؛ پس این رابطه معادله‌ی دایره نیست (هیچ نقطه‌ای را مشخص نمی‌کند).

ج) ابتدا دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم: $x^۲ + y^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲y - ۱ = ۰$

$a^۲ + b^۲ - ۴c = \frac{۹}{۴} + ۴ + ۴ = \frac{۴۱}{۴} > ۰ \Rightarrow (x - \frac{۳}{۴})^۲ + (y + ۱)^۲ = \frac{۴۱}{۱۶}$

پس دایره است با $r = \frac{\sqrt{۴۱}}{۴},\ O'(\frac{۳}{۴}, -۱)$.



۱۵ صفحه ۴۳ **فعالیت**

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقطه‌ی O(۱,−۱) مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی ۳x−۴y+۳=۰ مماس باشد.

۱ـ با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه‌ی تماس (H) بر خط .....

۲ـ طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از .....

۳ـ به کمک دستور فاصله‌ی نقطه از خط داریم: $r = OH = \frac{|\cdots\cdots|}{\sqrt{\cdots + \cdots}} = \cdots$

توشه ای برای موفقیت

۴ـ معادله‌ی دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم: $(x-1)^2+(y+1)^2=\cdots \Rightarrow \cdots$

۱) شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس **عمود است**.

۲) طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از **خط مماس** (زیرا OH بر خط عمود است).

۳) $r=OH=\frac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3+4+3|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$

۴) $(x-1)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow x^2+y^2-2x+2y-2=0$

۱۶ صفحه ۴۳ — کار در کلاس

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) بوده و روی خط به معادله‌ی x+y=۲ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

(راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)

فاصله‌ی مرکز از خط: $d=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

عمود وارد از مرکز بر وتر آن را نصف می‌کند؛ پس نصف وتر $\sqrt{2}$ است و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ساخته‌شده (شعاع وتر است):

$r^2=d^2+(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

معادله‌ی دایره: $x^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y-3=0$

۱۷ صفحه ۴۴ — فعالیت

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) بوده و با دایره‌ی $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

۱ـ معادله‌ی دایره‌ی فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$(x-\cdots)^2+(y-\cdots)^2=\cdots \Rightarrow O'(\cdots,\cdots),\ r'=\cdots$

۲ـ طول خط‌المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم: $d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\cdots$

۳ـ با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ می‌دانیم، داریم: $d=|r-r'|\Rightarrow |r-\cdots|=2\sqrt{2}\Rightarrow r-\cdots=\pm 2\sqrt{2}\Rightarrow r=\cdots\cdots$

۴ـ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره را می‌نویسیم: $(x-0)^2+(y-1)^2=(\cdots\pm 2\sqrt{2})^2$ **چرا مسئله دو جواب دارد؟**

۱) $x^2-4x+4+y^2-6y+9=3+4+9\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=16\Rightarrow O'(2,3),\ r'=4$

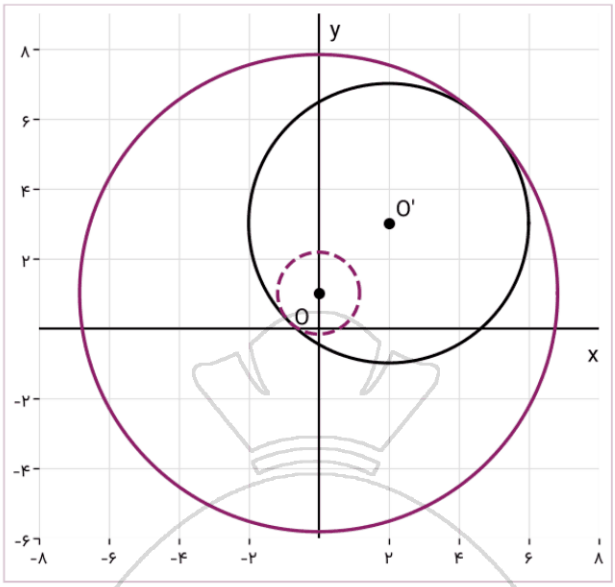
۲) $d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

۳) $d=|r-r'|\Rightarrow |r-4|=2\sqrt{2}\Rightarrow r-4=\pm 2\sqrt{2}\Rightarrow r=4\pm 2\sqrt{2}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴) $(x-0)^2+(y-1)^2=(4\pm2\sqrt{2})^2=24\pm16\sqrt{2}$

مسئله دو جواب دارد چون هر دو مقدار $r=4+2\sqrt{2}$ و $(\approx 1/17)$ $r=4-2\sqrt{2}$ مثبت‌اند. در حالت اول دایره‌ی داده‌شده درون دایره‌ی جدید (که بزرگ‌تر است) و در حالت دوم دایره‌ی جدید درون دایره‌ی داده‌شده قرار می‌گیرد؛ در هر دو حالت دو دایره مماس داخل‌اند.



۱۸ صفحه ۴۴ کار در کلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2-10x-14y+73=0$, $x^2+y^2-4x-6y=3$

ب) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x=1$

ج) $x^2+y^2-2x+2y+1=0$, $x^2+y^2=9$

د) $x^2+y^2-8x-4y+19=0$, $x^2+y^2=4$

(راهنمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به‌دست آورده و پس از تعیین طول خط‌المرکزین از اطلاعات خود از هندسه‌ی ۲ استفاده کنید.)

الف) $x^2+y^2-4x-6y=3\Rightarrow O_1(2,3),\ r_1=4$ و $x^2+y^2-10x-14y+73=0\Rightarrow O_2(5,7),\ r_2=1$

$r_1+r_2=5,\quad d=\sqrt{9+16}=5\ \Rightarrow$ **مماس خارج** (فاصله‌ی مرکزها برابر مجموع شعاع‌هاست)

ب) $(x-1)^2+y^2=2\Rightarrow O_1(1,0),\ r_1=\sqrt{2}$ و $x^2+y^2=1\Rightarrow O_2(0,0),\ r_2=1$

$|r_1-r_2|=\sqrt{2}-1<d<r_1+r_2=\sqrt{2}+1,\quad d=1\ \Rightarrow$ **متقاطع** (در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند)

ج) $x^2+y^2=9\Rightarrow O_1(0,0),\ r_1=3$ و $(x-1)^2+(y+1)^2=1\Rightarrow O_2(1,-1),\ r_2=1$

$d<r_1-r_2=2,\quad d=\sqrt{2}\ \Rightarrow$ **متداخل** (دایره‌ی کوچک‌تر کاملاً درون دایره‌ی بزرگ‌تر است و نقطه‌ی مشترکی ندارند)

ایران توشه
پوشه ای برای موفقیت

د) $x^2+y^2=4 \Rightarrow O_1(0,0),\ r_1=2$ و $(x-4)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow O_2(4,2),\ r_2=1$

$d=\sqrt{20}=2\sqrt{5},\quad d>r_1+r_2=3$ ⇒ **متخارج** (هر دو بیرون یکدیگرند و نقطه‌ی مشترکی ندارند)

۱۹ صفحه ۴۵ **فعالیت**

می‌خواهیم وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=4$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.

روش اول: از معادله‌ی خط، $y=4-x$ را در معادله‌ی دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله‌ی حاصل به‌دست می‌آید): $x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0 \Rightarrow \cdots$

با ساده‌کردن معادله‌ی حاصل و تعیین علامت Δ، نشان دهید معادله‌ی فوق ریشه‌ی حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه‌ی برخوردی ندارند.

روش دوم: معادله‌ی دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله‌ی مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه‌گیری‌تان را ببینید.

روش اول: $x^2+(16-8x+x^2)-8+2x-3=0 \Rightarrow 2x^2-6x+5=0$

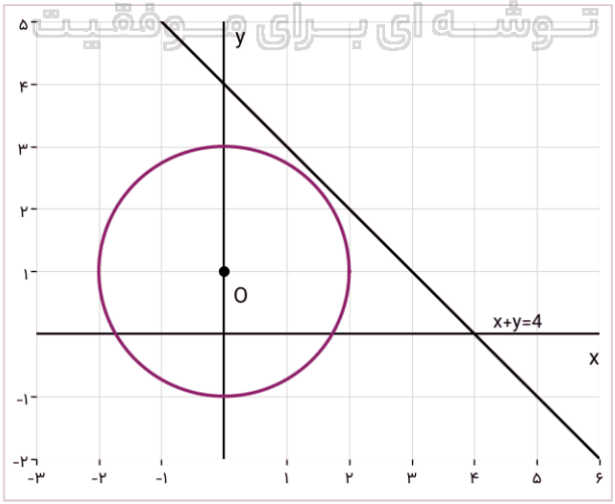
$\Delta=(-6)^2-4(2)(5)=36-40=-4<0$

چون $\Delta<0$ است معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد، یعنی خط و دایره نقطه‌ی مشترکی ندارند.

روش دوم: $x^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow O(0,1),\ r=2$

فاصله‌ی مرکز از خط $x+y-4=0$: $d=\frac{|0+1-4|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2/12>r=2$

چون فاصله‌ی مرکز از خط از شعاع بیشتر است، خط بیرون دایره قرار دارد و آن را قطع نمی‌کند. (اگر $d<r$ خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند [متقاطع]، اگر $d=r$ مماس است، و اگر $d>r$ بیرون دایره است.) شکل نیز درستی این نتیجه را نشان می‌دهد.



توشه‌ای برای موفقیت
ایران توشه

۲۰ صفحه ۴۵ — سؤال

اگر در معادله‌ی حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta>0$ یا $\Delta=0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله‌ی مرکز دایره از این خط چگونه است؟

- اگر $\Delta>0$: معادله دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؛ خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (خط **قاطع** است) و فاصله‌ی مرکز از خط **کمتر از شعاع** است ($d<r$).
- اگر $\Delta=0$: معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد؛ خط دایره را در یک نقطه قطع می‌کند (خط **مماس** است) و فاصله‌ی مرکز از خط **برابر شعاع** است ($d=r$).
- (اگر $\Delta<0$: خط و دایره نقطه‌ی مشترک ندارند و $d>r$ است.)

۲۱ صفحه ۴۶ — تمرین

۱ـ معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که:

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

الف) $r^2 = OA^2 = (3-1)^2 + (2-1)^2 = 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

ب) $r = \frac{|3(2)+4(1)|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

پ) $d = \frac{|-1-1-1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $r^2 = d^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$

ت) مرکز دایره روی هر دو قطر است، پس محل برخورد دو خط است:

$x+y=1,\ x-y=3 \Rightarrow x=2,\ y=-1 \Rightarrow O(2,-1)$

$r = \frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|8-3-6|}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25}$

ج) مرکز روی خط $y=2x-1$ است: $O(t, 2t-1)$. چون $OA=OB$:

$(t-1)^2 + (2t-3)^2 = (t-3)^2 + (2t-1)^2 \Rightarrow 5t^2 - 14t + 10 = 5t^2 - 10t + 10 \Rightarrow t = 0$

مرکز $O(0,-1)$ و $r^2 = OA^2 = 1+9 = 10$ (برای B: $9+1=10$ ✓). معادله: $x^2 + (y+1)^2 = 10$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۲۲ صفحه ۴۶ **تمرین**

۲ـ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

باید $a^2+b^2-4c>0$ باشد (در اینجا ضرایب $A=-3,\ B=5,\ C=a$ هستند):

$$9+25-4a>0 \Rightarrow a<\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$$

پس به ازای $a<17/2$ معادله‌ی یک دایره است. (برای $a=17/2$ فقط یک نقطه و برای $a>17/2$ هیچ نقطه‌ای به‌دست می‌آید.)

۲۳ صفحه ۴۶ **تمرین**

۳ـ وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

دایره: $(x-1)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow O(1,-2),\ r=\sqrt{10}$

هر نقطه را با فاصله‌اش از مرکز مقایسه می‌کنیم (یا مقدار $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y-5$ را حساب می‌کنیم؛ علامت منفی: درون، صفر: روی دایره، مثبت: بیرون).

نقطه	مربع فاصله از مرکز	$r^2=10$ مقایسه با	$f(x,y)$	وضعیت
$A(-1,-1)$	$1+4=5$	$5<10$	-5	درون دایره
$B(1,-2)$	$0+0=0$	$0<10$	-10	درون دایره (مرکز)
$C(2,3)$	$1+25=26$	$26>10$	16	بیرون دایره
$D(4,-1)$	$9+1=10$	$10=10$	0	روی دایره

۲۴ صفحه ۴۶ **تمرین**

۴ـ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1,\quad (x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^۲+y^۲=۱\ ,\quad x^۲+y^۲-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰$

د) $x^۲+y^۲=۱\ ,\quad x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

الف) $O_۱(۰,۰),\ r_۱=۲;\quad (x-۱)^۲+y^۲=۵:\ O_۲(۱,۰),\ r_۲=\sqrt{۵}$

$|r_۱-r_۲|=\sqrt{۵}-۲\approx ۰/۲۴<۱<r_۱+r_۲\approx ۴/۲۴,\quad d=۱\ \Rightarrow$ **متقاطع** (دو نقطه‌ی مشترک).

ب) $O_۱(۰,۱),\ r_۱=۱;\quad O_۲(۱,۰),\ r_۲=۱$

$|r_۱-r_۲|=۰<d=\sqrt{۲}\approx ۱/۴۱<r_۱+r_۲=۲\ \Rightarrow$ **متقاطع**.

ج) $O_۱(۰,۰),\ r_۱=۱;\quad a^۲+b^۲-۴c=۱۸+۱۸-۲۰=۱۶\Rightarrow O_۲\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right),\ r_۲=۲$

$d=\sqrt{\frac{۹}{۲}+\frac{۹}{۲}}=۳=r_۱+r_۲\ \Rightarrow$ **مماس خارج**.

د) $O_۱(۰,۰),\ r_۱=۱;\quad (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱:\ O_۲(۳,۱),\ r_۲=۱$

$d=\sqrt{۱۰}\approx ۳/۱۶>r_۱+r_۲=۲\ \Rightarrow$ **متخارج** (نقطه‌ی مشترکی ندارند).

---

۲۵ صفحه ۴۶ تمرین

۵ـ نقاط A(−۱,−۱) و B(۱,۱) و C(۱,−۳) رئوس مثلث ABC هستند. معادله‌ی دایره‌ی محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله‌ی مماس بر این دایره را در رأس B به‌دست آورید.

دایره‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ را از سه نقطه می‌گذرانیم:

$A:\ ۲-a-b+c=۰,\quad B:\ ۲+a+b+c=۰,\quad C:\ ۱۰+a-۳b+c=۰$

جمع دو معادله‌ی اول: $۴+۲c=۰\Rightarrow c=-۲$ ؛ آنگاه $a+b=۰$ و از معادله‌ی سوم $a-۳b=-۸\Rightarrow b=۲,\ a=-۲$.

دایره‌ی محیطی: $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰\Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴,\quad O(۱,-۱),\ r=۲$

مماس در B(۱,۱) بر شعاع OB عمود است. شیب OB بی‌نهایت است (OB قائم، چون $x_O=x_B=۱$) پس مماس افقی است و معادله‌ی آن $y=۱$ می‌باشد. (تحقیق: فاصله‌ی O از $y=۱$ برابر $r=۲$ است.)

---

۲۶ صفحه ۴۶ تمرین

۶ـ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $۳x+۴y=۰\ ,\quad x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$

ب) $x+y=۲\ ,\quad x^۲+y^۲=۲$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ج) $x+y=1\ ,\quad x^2+y^2-2x-2y=2$

الف) $d=\frac{|6+8|}{5}=\frac{14}{5}>1$; $(x-2)^2+(y-2)^2=1\Rightarrow O(2,2),\ r=1$; ⇒ خط بیرون دایره است (**جدا**).

ب) $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$; $O(0,0),\ r=\sqrt{2}$; ⇒ خط بر دایره **مماس** است.

ج) $d=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<2$; $(x-1)^2+(y-1)^2=4\Rightarrow O(1,1),\ r=2$; ⇒ خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (**قاطع**).

۲۷ صفحه ۴۷ **فعالیت**

یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطه‌ی F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و $l>FF'$. یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

۱ـ یک نقطه‌ی دلخواه روی شکل رسم‌شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از این دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر چیست؟

۲ـ یک نقطه‌ی دلخواه مانند A در درونِ بیضیِ رسم‌شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' کوچک‌تر از l است. (راهنمایی: پاره‌خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۳ـ یک نقطه‌ی دلخواه مانند B بیرونِ بیضیِ رسم‌شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' بزرگ‌تر از l است. (راهنمایی: اگر نقطه‌ی D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۴ـ از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه‌ی نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه‌ی دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵ـ با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ..... یک مقدار ..... است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱) وقتی نوک مداد در نقطه‌ی P است، نخ به دو پاره‌ی PF و PF' تقسیم شده و هر دو کشیده‌اند؛ پس $PF+PF'=l$ یعنی مجموع فاصله‌ها برابر **طول نخ** است و برای همه‌ی نقاط شکل یکسان است.

۲) FA را از طرف A امتداد می‌دهیم تا بیضی را در P قطع کند. در مثلث $AF'P$ طبق نامساوی مثلثی $AF'<AP+PF'$. دو طرف را با AF جمع می‌کنیم:

$AF+AF'<AF+AP+PF'=FP+PF'=l$ (زیرا A روی FP است). پس مجموع فواصل A از F و F' کمتر از l است.

۳) B بیرون بیضی است؛ پاره‌خط FB بیضی را در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند و $FB=FD+DB$. در مثلث DBF': $BF'+BD>DF'$. دو طرف را با FD جمع می‌کنیم:

$BF+BF'=FD+DB+BF'>FD+DF'=l$ (چون D روی بیضی است و $FD+DF'=l$). پس مجموع فواصل B از F و F' بزرگ‌تر از l است.

۴) همه‌ی نقاط بیضی ویژگی مشترک «**مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر مقدار ثابت l است**» را دارند؛ نقاط درون بیضی مجموعی کمتر و نقاط بیرون آن مجموعی بیشتر از l دارند؛ پس هیچ نقطه‌ی دیگری این ویژگی را ندارد.

۵) بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو **نقطه‌ی ثابت** یک مقدار **ثابت** (بزرگ‌تر از فاصله‌ی آن دو نقطه) است.

۲۸ صفحه ۴۸ **فعالیت**

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطر کانونی) و BB' قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. F و F' کانون‌های بیضی هستند و نقطه‌ی O، وسط پاره‌خط FF'، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازه‌ی پاره‌خط‌های OB، OA و OF را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم. بنابراین فاصله‌ی دو کانون بیضی برابر ۲c است.

۱ـ در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی که مداد در نقاط A و A' قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $FA=F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA'=OA=a$ و لذا اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است.

ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲ـ الف) در رسم بیضی وضعیتی که مداد در نقطه‌ی B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید $b^2+c^2=a^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه‌ی B' نتیجه بگیرید $OB'^2+c^2=a^2$ و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB'=OB=b$ و لذا اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر ۲b است.

---

۱ الف) ترتیب نقاط روی قطر بزرگ A', F', F, A است. وقتی مداد در A است، نخ روی خط FF' کشیده است: $l=AF+AF'=AF+(AF+FF')=2AF+FF'$. وقتی مداد در A' است: $l=A'F'+A'F=A'F'+(A'F'+F'F)=2A'F'+FF'$. پس $2AF+FF'=2A'F'+FF'$ و $FA=F'A'$.

چون O وسط FF' است ($OF=OF'$)، داریم $OA=OF'+F'A'=OF+FA$. پس $OA=OA'=a$ و $AA'=OA+OA'=2a$.

ب) $l = AF + AF' = (a - c) + (a + c) = 2a = AA'$؛ یعنی طول نخ برابر طول قطر بزرگ است.

۲ الف) مداد در B است؛ B روی عمودمنصف FF' (قطر کوچک) قرار دارد پس $BF=BF'$ و چون $BF+BF'=l=2a$، نتیجه می‌شود $BF=BF'=a$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBF (قائمه در O):

$$OB^2 + OF^2 = BF^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

ب) همین استدلال برای B' (که آن هم روی عمودمنصف FF' است): $B'F=B'F'=a$ و در مثلث $OB'F$: $OB'^2+c^2=a^2$. پس $OB'^2=a^2-c^2=b^2=OB^2$ و $OB'=OB=b$ و $BB'=2b$.

۲۹ صفحه ۴۸ کار در کلاس

۱ـ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، مختصات D را به‌دست آورید.

$OF=c=۴$ و $FA=a-c=۴$؛ پس $a=۸$ و $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸$. معادله‌ی بیضی: $\frac{x^۲}{۶۴} + \frac{y^۲}{۴۸} = ۱$

خط عمود در F همان $x=۴$ است. با جایگذاری: $\frac{۱۶}{۶۴} + \frac{y^۲}{۴۸} = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۴۸ \times \frac{۳}{۴} = ۳۶ \Rightarrow y = \pm ۶$

با توجه به شکل (D بالای محور x است): $D(۴, ۶)$ (نقطه‌ی قرینه‌ی آن $(۴, -۶)$ است).

۳۰ صفحه ۴۹ فعالیت

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی مورد نظر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $a \geq c \geq ۰$ و لذا $۰ \leq \frac{c}{a} \leq ۱$. دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به‌صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصله‌ی $۲c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به‌گونه‌ای انتخاب کنید که فاصله‌ی A تا F و فاصله‌ی A' تا F' برابر $a-c$ و اندازه‌ی AA' برابر $۲a$ باشد، سپس با استفاده از رابطه‌ی $b^۲=a^۲-c^۲$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید:

۱ـ $c=۱$ و $a=۴$ ؛ $c/a=۱/۴$

۲ـ $c=۲$ و $a=۸$ ؛ $c/a=۱/۴$

۳ـ $c=۱$ و $a=۲$ ؛ $c/a=۱/۲$

۴ـ $c=۲$ و $a=۴$ ؛ $c/a=۱/۲$

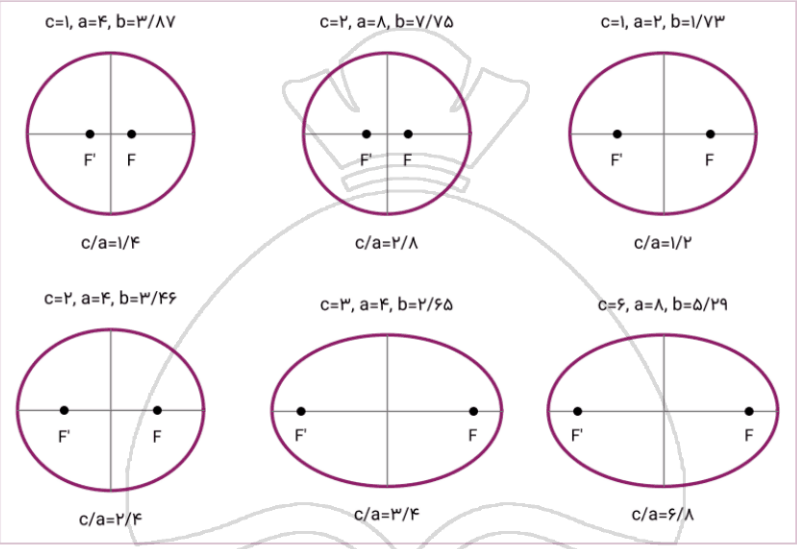
۵ـ $c=۳$ و $a=۴$ ؛ $c/a=۳/۴$

۶ـ $c=۶$ و $a=۸$ ؛ $c/a=۳/۴$

در هر حالت F و F' را به فاصله‌ی $۲c$ می‌گیریم، $AA'=۲a$ را طوری رسم می‌کنیم که O وسط آن باشد و B و B' را روی عمودمنصف FF' به فاصله‌ی $b=\sqrt{(a^۲-c^۲)}$ از O می‌گیریم:

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

حالت	c	a	$b^2=a^2-c^2$	b	c/a
۱	۱	۴	۱۶ - ۱ = ۱۵	$\sqrt{۱۵} \approx ۳/۸۷$	$\frac{۱}{۴}$
۲	۲	۸	۶۴ - ۴ = ۶۰	$۲\sqrt{۱۵} \approx ۷/۷۵$	$\frac{۱}{۴}$
۳	۱	۲	۴ - ۱ = ۳	$\sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$	$\frac{۱}{۲}$
۴	۲	۴	۱۶ - ۴ = ۱۲	$۲\sqrt{۳} \approx ۳/۴۶$	$\frac{۱}{۲}$
۵	۳	۴	۱۶ - ۹ = ۷	$\sqrt{۷} \approx ۲/۶۵$	$\frac{۳}{۴}$
۶	۶	۸	۶۴ - ۳۶ = ۲۸	$۲\sqrt{۷} \approx ۵/۲۹$	$\frac{۳}{۴}$



نتیجه: هرچه c/a به ۱ نزدیک‌تر باشد (b کوچک‌تر)، بیضی کشیده‌تر و هرچه به ۰ نزدیک‌تر باشد، بیضی به دایره نزدیک‌تر است. بیضی‌های با نسبت c/a برابر (۱ و ۲؛ ۳ و ۴؛ ۵ و ۶) هم‌شکل (متشابه) و فقط اندازه‌شان فرق دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۴۹ پرسش

در حالتی که c/a=۱ بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که c/a=۰ بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

اگر c/a=۱: $c=a$ و $b^2=a^2-c^2=0$ پس $b=0$. طول نخ $l=2a=2c=FF'$ برابر فاصله‌ی دو کانون است؛ نخ باید روی پاره‌خط FF' کشیده شود و مداد فقط روی همین پاره‌خط حرکت می‌کند. پس بیضی به پاره‌خط AA' (همان FF') تبدیل می‌شود.

اگر c/a=۰: $c=0$؛ دو کانون بر هم و بر مرکز O منطبق می‌شوند و $b^2=a^2$. شرط $PF+PF'=2a$ می‌شود $2PO=2a$ یعنی $PO=a$؛ همه‌ی نقاط از O به فاصله‌ی ثابت a‌اند، یعنی دایره‌ای به شعاع a.

۳۲ صفحه ۵۰ فعالیت

فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد.

۱ـ مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲ـ دو زاویه‌ی α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ـ با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه‌ی داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

۱) نقطه‌ی تماس M. زیرا خط مماس به جز در M همه‌جا بیرون بیضی است؛ پس برای هر نقطه‌ی دیگر X از d طبق فعالیت ۱: $XF+XF'>l$، در حالی که برای M که روی بیضی است $MF+MF'=l$. پس کمترین مجموع در M رخ می‌دهد.

۲) $\alpha=\beta$. قرینه‌ی F نسبت به d را F'' می‌نامیم؛ برای هر X روی d، $XF=XF''$ پس $XF+XF'=XF''+XF'$ و این مجموع وقتی کمترین است که X روی پاره‌خط $F'F''$ باشد. طبق (۱) کمینه در M است، پس F'، M و F'' هم‌خط‌اند. زاویه‌ی MF'' با d (متقابل به رأس با زاویه‌ی β) برابر زاویه‌ی MF با d (قرینه) یعنی α است؛ پس $\alpha=\beta$.

۳) مطابق قانون بازتاب (زاویه‌ی تابش = زاویه‌ی بازتاب) و برابری $\alpha=\beta$، پرتوی تابیده‌شده از کانون F به نقطه‌ی M پس از بازتاب در امتداد MF' می‌رود؛ یعنی **از کانون دیگر (F') خواهد گذشت.**

۳۳ صفحه ۵۰ فعالیت

یک خط ثابت مانند d و یک نقطه‌ی ثابت مانند F خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی F از خط d برابر l باشد.

ـ یک نقطه بیابید که فاصله‌ی آن از خط d و نقطه‌ی F یکسان باشد.

ـ آیا می‌توانید نقطه‌ی دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از خط d خطی موازی رسم کنید و آن را d' بنامید. تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله‌شان از خط d برابر l است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطه‌ی F و خط d به یک فاصله باشند.

ـ اگر مسئله‌ی پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصله‌ی یکسانی از خط d و نقطه‌ی F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می‌گردد.

نقطه‌ی اول: اگر H پای عمود از F بر d باشد، وسط پاره‌خط FH از d و از F به فاصله‌ی $l/2$ است.

نقاط دیگر: d' را موازی d و گذرنده از F (به فاصله‌ی l از d) رسم می‌کنیم. همه‌ی نقاط d' از d به فاصله‌ی l هستند؛ پس کافی است نقاطی از d' بیابیم که از F هم به فاصله‌ی l باشند: دایره‌ای به مرکز F و شعاع l رسم می‌کنیم؛ این دایره d' را در دو نقطه (در دو طرف F) قطع می‌کند و این دو نقطه از F و d هر دو به فاصله‌ی l هستند.

ایران توشه
پوشه‌ای برای موفقیت

راهکار کلی: برای هر عدد $k\geq l/2$، خط d_k موازی d به فاصله‌ی k از آن (در سمتی که F قرار دارد) رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز F و شعاع k. فاصله‌ی F از d_k برابر $|l-k|\leq k$ است، پس دایره خط را در دو نقطه (برای $k>l/2$) یا یک نقطه (برای $k=l/2$) قطع می‌کند. این نقاط از d و F هر دو به فاصله‌ی k هستند. با تغییر k نقاط بیشتری به‌دست می‌آید و مجموعه‌ی همه‌ی آن‌ها یک خم (سهمی) است.

۳۴ صفحه ۵۰ فعالیت

(فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا به نام‌های A، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه‌ی F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطه‌ی F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به‌گونه‌ای به نخ بگیرید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد.) در این حالت فاصله‌ی نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطه‌ی F نسبت به هم چگونه است؟

(صفحه‌ی ۵۱) حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکه‌ی نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه‌ی درحال حرکت نوک مداد را در هر حالت با X نمایش دهیم. پاره‌خط‌های BX و FX هرکدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطه‌ی X هستند و بین آن‌ها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

توضیح دهید که با ادامه‌ی این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دو طرف نقطه‌ی F می‌توان حرکت داد.)

نخ به طول AB یک سر در A و سر دیگر در F است و مداد آن را کشیده نگه می‌دارد، پس $AX+XF=AB$. از طرفی X روی AB است، پس $AX+XB=AB$. در نتیجه $XF=XB$: فاصله‌ی نوک قلم از F و از خط d **برابر** است (زیرا XB به‌خاطر قائمه بودن زاویه‌ی B گونیا بر d عمود است).

پاره‌خط‌های BX و FX: BX فاصله‌ی X از خط d (چون $AB\perp BC$ و BC روی d است) و FX فاصله‌ی X از نقطه‌ی F است. ارتباط: $BX=FX$ (چرا که $AX+XF=AB=AX+XB$).

ویژگی مشترک: همه‌ی نقاطی که مداد رسم می‌کند از خط d و نقطه‌ی F به یک فاصله‌اند ($XF=XB=d(X,d)$) و برعکس هر نقطه‌ی هم‌فاصله از d و F با حرکت گونیا قابل رسم است. این منحنی دو طرف نقطه‌ی F ادامه می‌یابد و **سهمی** نام دارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۵ صفحه ۵۱ فعالیت

۱ـ فرض کنید نقطه‌ی $F(a,0)$ ، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور yها به معادله‌ی $x=-a$ باشد و نقطه‌ی $P(x,y)$ نقطه‌ی دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم: $|PB|=|PF|$. چرا؟ بنابراین

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}$ با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت: $y^2=4ax$.

۲ـ در حالتی که خط هادی d موازی محور yها به معادله‌ی $x=a$ باشد ولی کانون $F(-a,0)$ در سمت چپ آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $y^2=-4ax$ است. در این حالت محور xها محور سهمی است.

۳ـ در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادله‌ی $y=-a$ و $F(0,a)$ کانون در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $x^2=4ay$ است. در این حالت محور yها محور سهمی است. (در واقع این معادله همان $y=\frac{1}{4a}x^2$ است که در پایه‌ی دهم به عنوان معادله‌ی سهمی با آن آشنا شدید.)

۴ـ در حالتی که خط هادی d موازی محور xها به معادله‌ی $y=a$ و $F(0,-a)$ کانون در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $x^2=-4ay$ است. در این حالت محور yها محور سهمی است.

۱) B پای عمود از P بر خط هادی است، پس PB فاصله‌ی P از خط هادی است و طبق تعریف سهمی (نقاط هم‌فاصله از کانون و خط هادی) PF=PB. با مربع کردن:

$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2\Rightarrow y^2=4ax$$

۲) $PF=PB:\ \sqrt{(x+a)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2}\Rightarrow (x+a)^2+y^2=(x-a)^2\Rightarrow y^2=-4ax$

۳) $\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{(y+a)^2}\Rightarrow x^2+y^2-2ay+a^2=y^2+2ay+a^2\Rightarrow x^2=4ay$

۴) $\sqrt{x^2+(y+a)^2}=\sqrt{(y-a)^2}\Rightarrow x^2+y^2+2ay+a^2=y^2-2ay+a^2\Rightarrow x^2=-4ay$

۳۶ صفحه ۵۳ پرسش

(در مثالِ «معادله‌ی سهمی به رأس A(۲,۱) و کانون F(۲,۵) را بیابید و معادله‌ی خط هادی آن را بنویسید»، با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت: ۱) a=۴ (چرا؟) ۲) معادله‌ی خط هادی آن y=-۳ است. چرا؟ ۳) (صفحه‌ی ۵۴) دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. چرا؟

۱) a فاصله‌ی رأس از کانون است: a=AF=۵-۱=۴.

۲) خط هادی عمود بر محور تقارن (x=۲) و در طرف مقابل کانون، به فاصله‌ی a=۴ از رأس است: y=۱-۴=-۳.

۳) کانون بالای رأس است و سهمی همواره به سمت کانون باز می‌شود (دور از خط هادی)، پس دهانه رو به بالاست و معادله‌ی آن $(x-2)^2=16(y-1)$ است.

۳۷ صفحه ۵۴ پرسش

(در مثالِ «مختصات کانون و همچنین معادله‌ی سهمی به رأس A(۴,۶) و خط هادی x=۹ را بنویسید» خواهیم داشت:) ۱) a=۵ چرا؟ ۲) کانون آن به مختصات F(−۱,۶) است، چرا؟ ۳) دهانه‌ی سهمی رو به چپ است. چرا؟

۱) فاصله‌ی رأس از خط هادی برابر a است: a=۹−۴=۵.

۲) محور تقارن خط افقی y=۶ است و کانون در طرف مقابل خط هادی نسبت به رأس و به فاصله‌ی a=۵ از رأس قرار دارد: x=۴−۵=−۱، پس F(−۱,۶).

۳) خط هادی سمت راست رأس و کانون سمت چپ آن است و سهمی به سمت کانون باز می‌شود؛ پس دهانه رو به چپ است و معادله $(y-۶)^۲=-۲۰(x-۴)$ می‌شود.

۳۸ صفحه ۵۵ پرسش

حال اگر خطی را که در نقطه‌ی F بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً B و B' را که به فاصله‌ی ۲a× از F هستند مشخص نماییم، در این صورت نقاط B و B' بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

خط گذرنده از F و عمود بر محور با خط هادی موازی است و فاصله‌ی F از خط هادی برابر ۲a است؛ پس فاصله‌ی هر نقطه‌ی این خط، از جمله B و B'، از خط هادی برابر ۲a است. از طرفی $BF=B'F=۲a$. بنابراین B و B' از کانون و خط هادی به یک فاصله‌اند و طبق تعریف روی سهمی قرار دارند.

(با معادله: در $y^۲=۴ax$ به ازای x=a داریم $y^2=۴a^2$ و y=±۲a.)

۳۹ صفحه ۵۷ تمرین

۱ـ دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

چون A و B روی بیضی‌اند: $AF+AF'=BF+BF'=l$ و با فرض $AF'=BF$ نتیجه می‌شود $AF=BF'$. پس مثلث‌های $AF'F$ و BFF' سه ضلع نظیر برابر دارند ($AF'=BF$، $AF=BF'$، FF' مشترک) و هم‌نهشت‌اند: $\angle AFF'=\angle BF'F$.

الف) اگر AF و BF' درون بیضی یکدیگر را قطع نکنند، A و B در دو طرف خط FF' هستند و $\angle AFF'$ و $\angle BF'F$ زاویه‌های برابر و مبدل (متبادل) نسبت به مورب FF' می‌شوند؛ پس $AF \parallel BF'$ (در واقع $AF'BF$ متوازی‌الاضلاع است چون هر دو جفت ضلع مقابل برابرند).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) اگر AF و BF' در M متقاطع باشند، A و B در یک طرف FF' هستند و از $\angle MFF'=\angle MF'F$ نتیجه می‌شود مثلث FMF' متساوی‌الساقین است ($MF=MF'$). M از F و F' به یک فاصله است؛ پس روی عمودمنصف FF' یعنی روی خط قطر کوچک بیضی قرار دارد، و چون درون بیضی است روی قطر کوچک است.

۴۰ صفحه ۵۷ تمرین

۲ـ قطر دایره‌ی C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

دایره به مرکز O و شعاع a است؛ پس $OM=a$. $OF=c$ و $MF\perp OF$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OFM:

$$MF^2 = OM^2 - OF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

و b نصف قطر کوچک بیضی است.

۴۱ صفحه ۵۷ تمرین

۳ـ در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF'=MF'$

طبق فعالیت ۴، خط مماس با دو شعاع کانونی MF و MF' زاویه‌های برابر می‌سازد. N' را نقطه‌ای از d در آن‌سوی M نسبت به N بگیرید؛ آنگاه $\angle FMN'=\angle F'MN$.

چون $F'N \parallel MF$ و d مورب است، زاویه‌های متناظر برابرند: $\angle F'NM=\angle FMN'$. پس $\angle F'NM=\angle F'MN$ و در مثلث $F'MN$ دو زاویه‌ی N و M برابرند؛ مثلث متساوی‌الساقین است و $NF'=MF'$. (درستی این نتیجه برای یک بیضی نمونه نیز با محاسبه‌ی عددی راستی‌آزمایی شد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۲ صفحه ۵۷ تمرین

۴ـ نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به‌گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM=OF=OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

irantooshe.ir

ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

قطرها ۶ و ۱۰ هستند: $2a=10,\ 2b=6 \Rightarrow a=5,\ b=3,\ c=\sqrt{25-9}=4$

الف) $OF=OF'=c=4$ و طبق فرض $OM=4$؛ پس $OM=OF=OF'$.

ب) چون $OM=OF=OF'=\frac{1}{2}FF'$، M روی دایره‌ای به قطر FF' است؛ یعنی میانه‌ی MO نصف ضلع FF' است و در نتیجه $\angle FMF'=90^\circ$. (یا: مثلث‌های OMF و OMF' متساوی‌الساقین‌اند و مجموع زاویه‌ها نتیجه می‌دهد زاویه‌ی M برابر 90° است.)

ج) $MF+MF'=2a=10, \quad MF^2+MF'^2=FF'^2=8^2=64$

$$MF\cdot MF'=\frac{10^2-64}{2}=18 \Rightarrow t^2-10t+18=0 \Rightarrow t=5\pm\sqrt{7}$$

پس یکی از دو طول $5+\sqrt{7}$ و دیگری $5-\sqrt{7}$ است (نقطه‌ی M به هر کانون نزدیک‌تر باشد، طول آن کوچک‌تر است).

---

۴۳ صفحه ۵۷ تمرین

۵ـ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟

$2a=2\cdot 2b$ پس $a=2b$. $c^2=a^2-b^2=3b^2 \Rightarrow c=\sqrt{3}\,b$

$BF=BF'=a$ (چون B روی قطر کوچک است). در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBF:

$$\cos(\angle OBF)=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow \angle OBF=60^\circ$$

چون BO نیمساز زاویه‌ی FBF' است: $\angle FBF'=2\times 60^\circ=120^\circ$.

---

۴۴ صفحه ۵۷ تمرین

۶ـ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطرند. خط d در نقطه‌ی B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه‌ی F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\angle BCF=45^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.

d در B مماس بر بیضی و موازی AA' است. در مثلث BFC داریم $\angle F=90^\circ$ و $\angle C=45^\circ$، پس $\angle CBF=45^\circ$. چون $BC\parallel OF$، $\angle BFO=\angle CBF=45^\circ$ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBF متساوی‌الساقین است:

$$b=c, \quad a=BF=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}\,c$$

مثلث BFC هم متساوی‌الساقین است و $BC=\sqrt{2}\,BF=\sqrt{2}\,a$؛ $CD\perp AA'$ پس $OD=BC=\sqrt{2}a$.

$$AF=a-c=a-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}, \qquad AD=OD-OA=\sqrt{2}a-a=a(\sqrt{2}-1),$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$\frac{AD}{AF} = \sqrt{2}$$

۴۵ صفحه ۵۸ تمرین

۷ـ سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

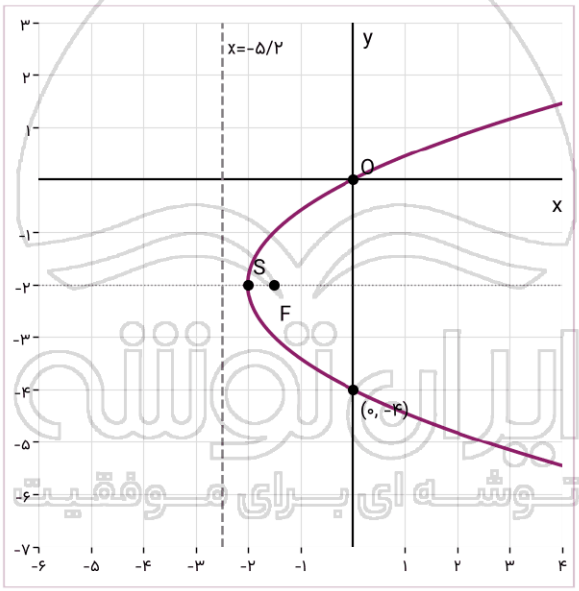
$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

رأس $S(-2,-2)$؛ $4a=2$ پس $a=1/2$؛ دهانه رو به راست و محور سهمی خط $y=-2$ است.

کانون: $F(-2+\frac{1}{2}, -2) = F(-\frac{3}{2}, -2)$ ؛ خط هادی: $x = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

برخورد با محورها:

- با محور yها $(x=0)$: $y(y+4) = 0 \Rightarrow y=0$ یا $y=-4$؛ نقاط $(0,0)$ و $(0,-4)$.
- با محور xها $(y=0)$: $x = 0 \Rightarrow 2x = 0$ ⇒ فقط $(0,0)$ (محور xها با محور تقارن سهمی موازی است و آن را فقط یک بار قطع می‌کند).



۴۶ صفحه ۵۸ تمرین

۸ـ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را به دست آورید.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

با مقایسه با $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (فاصله‌ی کانونی p): $4p = \frac{1}{a} \Rightarrow p = \frac{1}{4a}$

رأس: $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

کانون (به اندازه‌ی p در راستای محور بالاتر از رأس؛ برای a<۰ پایین‌تر): $F\left(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac-b^۲+۱}{۴a}\right)$ ؛ خط هادی: $y=\frac{۴ac-b^۲-۱}{۴a}$

۴۷ صفحه ۵۸ تمرین

۹ـ معادله‌ی سهمی را بنویسید که S(۱,۲) رأس و F(۱,-۲) کانون آن باشد.

رأس و کانون هر دو روی خط x=۱اند؛ محور سهمی قائم است و چون کانون زیر رأس است دهانه رو به پایین است. $a=SF=|۲-(-۲)|=۴$

معادله: $(x-۱)^۲=-۴a(y-۲)\Rightarrow(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

(تحقیق: برای نقطه‌ی $(۹,-۲)=(۱+۸,۲-۴)$ که هم‌تراز کانون است، فاصله‌اش از کانون ۸ و از خط هادی y=۶ نیز ۸ است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۸ صفحه ۵۸ تمرین

۱۰ـ سهمی $y^2=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$y^۲=۴(x-۱)\Rightarrow S(۱,۰),\ a=۱,\ F(۲,۰)$

دایره: $(x-۲)^۲+y^۲=۹$

جایگذاری $y^2=۴x-۴$: $(x-۲)^۲+۴x-۴=۹\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$

برای سهمی x≥۱ لازم است؛ پس x=۳ و $y^۲=۸\Rightarrow y=\pm۲\sqrt{۲}$. نقاط برخورد: $(۳,۲\sqrt{۲})$ و $(۳,-۲\sqrt{۲})$.

۴۹ صفحه ۵۸ تمرین

۱۱ـ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

(⇒) دایره‌ای به مرکز M از F می‌گذرد و در H بر d مماس است. شعاع MH بر d عمود است، پس MH فاصله‌ی M از d است و MH=MF (هر دو شعاع‌اند). بنابراین M از F و d به یک فاصله است و روی سهمی قرار دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(⇐) اگر M روی سهمی باشد و H پای عمود از M بر d، آنگاه MF=MH. دایره‌ی به مرکز M و شعاع MH از F می‌گذرد و چون MH⊥d در H بر d مماس است.

تعریف دیگر: سهمی مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که از یک نقطه‌ی ثابت (F) می‌گذرند و بر یک خط ثابت (d، که F روی آن نیست) مماس‌اند.

۵۰ صفحه ۵۸ تمرین

۱۲ـ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

H پای عمود از F بر d است؛ رأس A وسط FH است (FH=2FA) و طبق تعریف MT=MF. چون MT∥FH (هر دو بر d عمودند)، در مثلث NFH طبق قضیه‌ی تالس:

$$\frac{NM}{NF} = \frac{NT}{NH} = \frac{MT}{FH}$$

از NF=NM+MF=NM+MT نتیجه می‌گیریم $\frac{NF}{FH} = \frac{MT}{FH-MT} \Rightarrow NF\left(1-\frac{MT}{FH}\right) = MT \Rightarrow NF = NF\cdot\frac{MT}{FH} + MT$.

از طرف دیگر $\frac{MT}{FH-MT} = \frac{MT/FH}{1-MT/FH} = \frac{NT/NH}{1-NT/NH} = \frac{NT}{NH-NT} = \frac{NT}{TH}$؛ پس $\frac{FN}{FH} = \frac{NT}{TH}$ و چون FH=2FA:

$$\frac{FN}{FA} = \frac{2FN}{FH} = \frac{2NT}{TH} \blacksquare$$

۵۱ صفحه ۵۸ تمرین

۱۳ـ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده‌ی فاصله‌ی کانونی متفاوت آن‌ها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه‌ی دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازه‌ی گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله‌ی کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

مقطع دیش سهمی با رأس در مبدأ است: $x^2 = 4ay$ که در آن a فاصله‌ی کانونی است. نقطه‌ی لبه‌ی دیش (x_0, y_0) روی سهمی است؛ $2x_0$ قطر دهانه‌ی دیش و y_0 عمق آن است.

$$x_0^2 = 4ay_0 \Rightarrow a = \frac{x_0^2}{4y_0} = \frac{(2x_0)^2}{16y_0} = \frac{D^2}{16h}$$

که در آن $D=2x_0$ قطر دهانه و $h=y_0$ عمق دیش است؛ یعنی فاصله‌ی کانونی برابر «مربع قطر دهانه تقسیم بر (۱۶ برابر عمق)» است که همان دستور معلم است.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

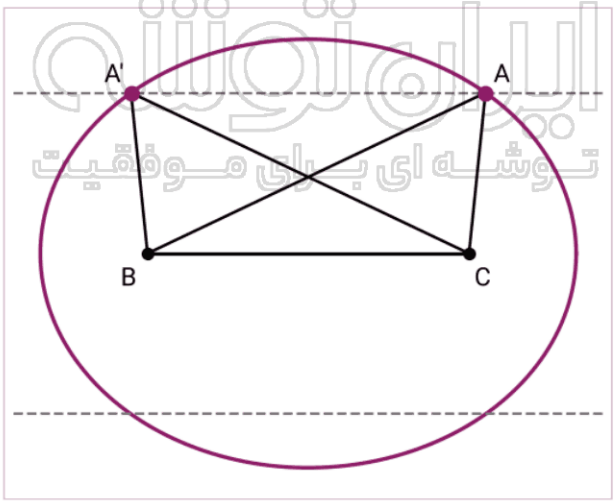
۵۲ صفحه ۵۸ تمرین

۱۴ـ فرض کنید از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه‌ی رسم این مثلث را توضیح دهید.

فرض کنیم $BC=a_0$، $AH=h$ و محیط $2p$ داده شده باشد. آنگاه $AB + AC = 2p - a_0 = l$ مقداری ثابت (و بزرگ‌تر از BC) است.

1. پاره‌خط BC را به طول داده‌شده رسم می‌کنیم.
2. خطی موازی BC به فاصله‌ی h از آن رسم می‌کنیم؛ رأس A روی این خط است (زیرا ارتفاع AH برابر h است).
3. چون $AB+AC=l$ ثابت است، A روی بیضی‌ای قرار دارد که کانون‌هایش B و C و مجموع فاصله‌ها (طول نخ) l است. این بیضی را با نخ و مداد (نخی به طول l که دو سرش در B و C ثابت است) یا با تعیین نقاط رسم می‌کنیم.
4. محل برخورد این بیضی با خط موازی، رأس A است (و A' قرینه‌ی آن نسبت به عمودمنصف BC).

بحث: اگر $b=\frac{1}{2}\sqrt{(l^2-a_0^2)}$ نیم‌قطر کوچک بیضی باشد، برای $h<b$ دو جواب (A و A' مثلث‌های هم‌نهشت)، برای $h=b$ یک جواب (مثلث متساوی‌الساقین) و برای $h>b$ مسئله جواب ندارد.



۵۳ صفحه ۵۹ تمرین

۱۵ـ سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1: y=ax+b$ و $d_2: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، در نظر بگیرید.

الف) معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطه‌ی M را به‌دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه‌ی M' (نقطه‌ی وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) به‌دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

الف) $x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$

ب) طول‌های A و B ریشه‌های این معادله‌اند: $x_A + x_B = a$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a}{2}, \quad y_M = a \cdot \frac{a}{2} + b = \frac{a^2}{2} + b \Rightarrow M\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + b\right)$$

پ) $x^2 - ax - b' = 0 \Rightarrow x_{M'} = \frac{a}{2}, \; y_{M'} = \frac{a^2}{2} + b' \Rightarrow M'\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2} + b'\right)$

ت) M و M' طول یکسان $a/2$ دارند؛ پس خط MM' **موازی محور yها** (قائم) است، یعنی موازی محور تقارن سهمی $y=x^2$.

ث) این ویژگی برای هر سهمی برقرار است: وسط‌های وترهای موازی یک سهمی روی خطی موازی محور تقارن قرار دارند. روش رسم محور:

1. دو وتر موازی دلخواه از سهمی رسم می‌کنیم و وسط‌های آن‌ها را M و M' می‌نامیم؛ خط MM' موازی محور سهمی است.
2. وتری عمود بر MM' (یعنی عمود بر راستای محور) رسم می‌کنیم؛ وسط این وتر N روی محور سهمی قرار دارد.
3. خطی که از N موازی MM' رسم شود (یا عمودمنصف همین وتر) محور تقارن سهمی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

