با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام هندسه (۳) دوازدهم
فصل اول

عنوان فصل: ماتریس و کاربردها

از صفحه‌ی ۹ تا صفحه‌ی ۳۲ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل ماتریس و کاربردها آمده است.

مباحث فصل: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها، وارون ماتریس و دترمینان

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۱۱ · کار در کلاس — نمایش اطلاعات فروشگاه‌ها با ماتریس	۶
۲	صفحه ۱۴ · کار در کلاس — جمع و تفریق ماتریس‌ها	۶
۳	صفحه ۱۵ · کار در کلاس — ضرب عدد در ماتریس	۷
۴	صفحه ۱۷ · کار در کلاس — بررسی خاصیت (ج) و اثبات آن	۹
۵	صفحه ۱۷ · کار در کلاس — تعریف ماتریس‌های سطری و ستونی با حاصل‌ضرب ۷-	۱۰
۶	صفحه ۱۸ · پرسش درون متن — امکان‌پذیر بودن ضرب B×A	۱۰
۷	صفحه ۱۸ · کار در کلاس — محاسبه‌ی A×B و B×A	۱۰
۸	صفحه ۱۹ · کار در کلاس — خواص ضرب ماتریس‌ها: جابه‌جایی و عضو خنثی	۱۲
۹	صفحه ۱۹ · کار در کلاس — خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع	۱۳
۱۰	صفحه ۲۰ · کار در کلاس — خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها	۱۳
۱۱	صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۱	۱۴
۱۲	صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۲	۱۴
۱۳	صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۳	۱۴
۱۴	صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۴	۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ صفحه ۲۰ · تمرین — تمرین ۵ ..... ۱۵
۱۶ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۶ ..... ۱۶
۱۷ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۷ ..... ۱۶
۱۸ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۸ ..... ۱۷
۱۹ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۹ ..... ۱۷
۲۰ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۱۰ ..... ۱۸
۲۱ صفحه ۲۱ · تمرین — تمرین ۱۱ ..... ۱۸
۲۲ صفحه ۲۲ · مسئله — نشان دادن وارون بودن دو ماتریس ۱۹
۲۳ صفحه ۲۳ · مثال — امتحان پاسخ وارون ماتریس ۱۹
۲۴ صفحه ۲۳ · پرسش کنار صفحه — آیا دو ماتریس وارون یکدیگرند؟ ۲۰
۲۵ صفحه ۲۳ · پرسش کنار صفحه — وارونِ وارون ماتریس ۲۰
۲۶ صفحه ۲۴ · فعالیت — حل دستگاه با ماتریس وارون ۲۰
۲۷ صفحه ۲۵ · مثال (تکمیلی) — حل دستگاه با ماتریس وارون ۲۱
۲۸ صفحه ۲۵ · پرسش کنار صفحه — دستگاه با دترمینان صفر ۲۲
۲۹ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — بررسی دستگاه $2x-3y=3$ و $4x+6y=-1$ ۲۲
۳۰ صفحه ۲۸ · پرسش کنار صفحه — دترمینان ماتریسی با درایه‌های دترمینان ۲۳

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۲۹ · پرسش کنار صفحه — معادله‌ی $|A|^2-۵|A|+۶=۰$ ۲۳

۳۲ صفحه ۲۹ · کار در کلاس — دترمینان حاصل‌ضرب، توان و ماتریس قطری ۲۴

۳۳ صفحه ۳۰ · پرسش کنار صفحه — دترمینان ماتریس اسکالر با $a_{11}=۴$ ۲۵

۳۴ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۱ ..... ۲۵

۳۵ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۲ ..... ۲۶

۳۶ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۳ ..... ۲۶

۳۷ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۴ ..... ۲۶

۳۸ صفحه ۳۰ · تمرین — تمرین ۵ ..... ۲۷

۳۹ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۶ ..... ۲۷

۴۰ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۷ ..... ۲۸

۴۱ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۸ ..... ۲۸

۴۲ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۹ ..... ۲۹

۴۳ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۰ ..... ۲۹

۴۴ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۱ ..... ۲۹

۴۵ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۲ ..... ۳۰

۴۶ صفحه ۳۱ · تمرین — تمرین ۱۳ ..... ۳۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۱۱ | کار در کلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است. این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A: ۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن

فروشگاه B: ۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن

فروشگاه C: ۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن

فروشگاه D: ۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

اگر هر سطر را به یک فروشگاه (به ترتیب A، B، C، D) و هر ستون را به یک نوع لباس (به ترتیب شلوار، بلوز، پیراهن) اختصاص دهیم، ماتریس ۴×۳ به‌دست می‌آید:

$$M_{4\times3}=\begin{bmatrix}۲۴ & ۱۵ & ۷\\ ۲۶ & ۱۹ & ۱۱\\ ۱۷ & ۲۸ & ۲۲\\ ۱۲ & ۳۱ & ۳۵\end{bmatrix}$$

اگر هر سطر را به یک نوع لباس و هر ستون را به یک فروشگاه اختصاص دهیم، ماتریس ۳×۴ (ترانهاده‌ی ماتریس بالا) به‌دست می‌آید:

$$N_{3\times4}=\begin{bmatrix}۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲\\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱\\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵\end{bmatrix}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ صفحه ۱۴ | کار در کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\cdots$

ب) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۳ & ۷\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & -۱ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳ & ۲\\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۴ & -۷\\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\cdots$

ت) $A=[۵],\ B=[-۷]\Rightarrow A+B=\cdots$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

الف) دو ماتریس هم‌مرتبه‌اند (۲×۲)؛ درایه‌های نظیر را از هم کم می‌کنیم:

$$A - B = \begin{bmatrix} ۱-(-۱) & ۲-۲ \\ ۳-۳ & ۴-۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب) هر دو ماتریس سطری ۱×۴ هستند و درایه‌های نظیر را جمع می‌کنیم:

$$A + B = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

پ) هر دو ماتریس ۲×۴ هستند:

$$A - B = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۱ & ۹ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۳ & -۴ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

ت) هر دو ماتریس ۱×۱ هستند: $A + B = [5 + (-7)] = [-2]$ (یعنی عدد ۲-).

ث) کافی است ماتریس دوم را قرینه‌ی ماتریس اول بگیریم؛ مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۳ صفحه ۱۵ **کار در کلاس**

۱ـ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف)
$$-۱ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ -۴ & -۵ & -۶ \end{bmatrix} =$$

ب)
$$\frac{۱}{۲} \times \begin{bmatrix} ۴ & ۶ & ۸ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۵ & ۷ \\ \sqrt{۲} & -۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix} =$$

پ) $= 0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ت) $= 7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲ـ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$= 2 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1) \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

۱ـ الف) $-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

ب) $\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$

پ) ضرب عدد صفر در هر ماتریس، ماتریس صفر هم‌مرتبه با آن را نتیجه می‌دهد:

$$0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ت) $7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲ـ از هر درایه‌ی ماتریس اول عامل مشترک ۲ و از هر درایه‌ی ماتریس دوم عامل مشترک (۱-) بیرون می‌آوریم:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۸ & ۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} = ۲ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۵ & \frac{۳}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} = (-۱) \times \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & -۱ & -۴ \\ -۲ & -۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴ صفحه ۱۷ — کار در کلاس

۱ـ برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ **و دو عدد حقیقی** $r = ۳$ **و** $s = -۲$ **برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.**

۲ـ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

خاصیت (ج): $(r \pm s)A = rA \pm sA$

۱ـ داریم $r + s = 3 + (-2) = 1$ پس:

$$(r + s)A = ۱ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

از طرفی:

$$rA + sA = ۳ \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} + (-۲) \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

پس $(r + s)A = rA + sA$.

همچنین $r - s = 5$ و

$$(r - s)A = rA - sA = \begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۲ & -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix}.$$

۲ـ فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $r, s \in \mathbb{R}$. آنگاه:

$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}]$ (تعریف ضرب عدد در ماتریس)

$= [ra_{ij} \pm sa_{ij}]$ (توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق در $\mathbb{R}$)

$= [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}]$ (تعریف جمع و تفریق ماتریس‌ها)

$= r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$ (تعریف ضرب عدد در ماتریس)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵ صفحه ۱۷ | کار در کلاس

یک ماتریس سطری ۳ × ۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱ × ۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-7$.

ماتریس سطری ۱×۳ و ماتریس ستونی ۳×۱ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم (مرتبه‌ی ماتریس‌ها طبق صورت پرسش، سطری با سه ستون و ستونی با سه سطر است):

$$A=[۱\ \ ۲\ \ ۳],\quad B=\begin{bmatrix}۱\\-۱\\-۲\end{bmatrix}$$

$$A\times B=[۱\times ۱+۲\times(-۱)+۳\times(-۲)]=[۱-۲-۶]=[-۷]$$

پاسخ یکتا نیست؛ هر دو ماتریسی که مجموع حاصل‌ضرب درایه‌های نظیرشان ۷- شود پذیرفته است.

۶ صفحه ۱۸ | پرسش درون متن

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۳&۲&۱\\-۱&-۲&۴\end{bmatrix}_{۳\times ۳},\ B=\begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&۲\\۴&۵\end{bmatrix}_{۳\times ۲}$ **آیا ضرب (A×B) امکان‌پذیر است؟ چرا؟**

خیر. برای تعریف حاصل‌ضرب B×A باید تعداد ستون‌های B با تعداد سطرهای A برابر باشد. اما B ماتریسی ۳×۲ است و تعداد ستون‌هایش ۲ است، در حالی که A ماتریسی ۳×۳ است و ۳ سطر دارد. چون $۲\neq ۳$، ضرب B×A تعریف‌شده نیست. (ولی A×B چون ستون‌های A برابر ۳ و سطرهای B برابر ۳ است، تعریف می‌شود.)

۷ صفحه ۱۸ | کار در کلاس

۱ـ برای هر حالت A×B و B×A را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&۴\\۰&۰&۰\\۱&۲&۳\end{bmatrix}_{۳\times ۳},\ B=\begin{bmatrix}۱&۲&۳&-۱\\-۱&۰&۱&-۲\\۳&۱&-۱&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\cdots$

ب) $A=\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۱\\۳&-۲\end{bmatrix}_{۳\times ۲},\ B=\begin{bmatrix}۲&-۱&۱\\۳&۰&۵\end{bmatrix}_{۲\times ۳}\Rightarrow A\times B=\cdots,\ B\times A=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix}۱\\-۱\\۲\end{bmatrix}_{۳\times ۱},\ B=[۲\ \ ۳\ \ ۴]_{۱\times ۳}\Rightarrow A\times B=\cdots,\ B\times A=\cdots$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ت) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\\ -۱ & ۲ & -۲\end{bmatrix}$ $A\times B=\begin{bmatrix}۰ & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی که «اگر $a\times b=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$» مقایسه کنید.

۲ـ اگر A ماتریسی ۳×۵ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که A×B و B×A قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه‌ی آن را بیابید:

الف) $B=[b_{ij}]_{۳\times ۲}$ ب) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۳}$ پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۳}$ ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۴}$ ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times ۵}$

۱ـ الف) A از مرتبه‌ی ۳×۳ و B از مرتبه‌ی ۳×۴ است. A×B تعریف می‌شود و ۳×۴ است؛ B×A تعریف نمی‌شود (ستون‌های B: ۴، سطرهای A: ۳).

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱۴ & ۶ & -۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۸ & ۵ & ۲ & -۵\end{bmatrix}$$

ب) A از مرتبه‌ی ۳×۲ و B از مرتبه‌ی ۲×۳ است؛ هر دو حاصل‌ضرب تعریف می‌شوند (A×B از مرتبه‌ی ۳×۳ و B×A از مرتبه‌ی ۲×۲):

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۴\\ ۷ & -۲ & ۷\\ ۰ & -۳ & -۷\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۱۸ & -۱۳\end{bmatrix}$$

پ) A از مرتبه‌ی ۳×۱ و B از مرتبه‌ی ۱×۳ است؛ A×B ماتریسی ۳×۳ و B×A ماتریسی ۱×۱ است:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ -۲ & -۳ & -۴\\ ۴ & ۶ & ۸\end{bmatrix}$$

$$B\times A=[۲\times ۱+۳\times(-۱)+۴\times ۲]=[۷]$$

ت) A از مرتبه‌ی ۲×۳ و B از مرتبه‌ی ۳×۳ است؛ A×B ماتریسی ۲×۳ است (B×A تعریف نمی‌شود):

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

در اینجا $A\neq O$ و $B\neq O$ ولی $A\times B=O$. یعنی در ضرب ماتریس‌ها از $AB=O$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A=O$ یا $B=O$؛ در حالی که در اعداد حقیقی از $a\times b=۰$ حتماً $a=۰$ یا $b=۰$ نتیجه می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ـ $A\times B$ وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A (۳) با تعداد سطرهای B برابر باشد و $B\times A$ وقتی که تعداد ستون‌های B با تعداد سطرهای A (۵) برابر باشد.

حالت	$A\times B$	$B\times A$
الف) ۲×۳	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۲×۵	تعریف نمی‌شود
ب) ۵×۳	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۵×۵	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۳×۳
پ) ۳×۵	تعریف نمی‌شود	تعریف نمی‌شود
ت) ۴×۵	تعریف نمی‌شود	تعریف نمی‌شود
ث) ۵×۵	تعریف نمی‌شود	تعریف می‌شود، مرتبه‌ی ۳×۵

۸ صفحه ۱۹ **کار در کلاس**

۱ـ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ **در این صورت حاصل (A×B) و (B×A) را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

نتیجه: در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

۲ـ ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ **را از چپ و راست در ماتریس** $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ **ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۴\\ ۴ & ۴\end{bmatrix},\qquad B\times A=\begin{bmatrix}۳ & -۱۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم $A\times B\neq B\times A$. بنابراین: **در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.**

۲ـ
$$I\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$A\times I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

هر دو حاصل‌ضرب برابر A است: $I\times A=A\times I=A$. پس ماتریس واحد در ضرب ماتریس‌ها نقش عضو خنثی را دارد (و در این حالت خاص جابه‌جایی برقرار است).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۹ صفحه ۱۹ کار در کلاس

۳ـ اگر $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}_{۲\times۲}$, $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}_{۳\times۲}$ **و** $C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ **در این صورت درستی تساوی** $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ **را بررسی کنید.**

$$B+C=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A\times(B+C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۱۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ -۱ & ۱\\ ۰ & -۵\end{bmatrix},\quad A\times C=\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ -۲ & -۳\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}$$

$$(A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ -۱ & ۱\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ -۲ & -۳\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۱۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & ۰\end{bmatrix}$$

دو طرف تساوی با هم برابرند؛ پس تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ درست است.

۱۰ صفحه ۲۰ کار در کلاس

۴ـ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره‌ی (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

$$B\times C=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۲۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ -۱ & ۱\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\Rightarrow(A\times B)\times C=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ -۱ & ۱\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۲۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}$$

هر دو طرف برابرند؛ پس $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ برقرار است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱ صفحه ۲۰ تمرین

۱ـ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

طبق شکل پرسش، ماتریس دارای ۳ سطر و ۴ ستون است ($A=[a_{ij}]_{3\times4}$). درایه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

- $i=j:\ a_{11}=a_{22}=a_{33}=7$
- $i>j:\ a_{21}=2+1=3,\ a_{31}=3+1=4,\ a_{32}=3+2=5$
- $i<j:\ a_{12}=a_{13}=a_{14}=1^2=1,\ a_{23}=a_{24}=2^2=4,\ a_{34}=3^2=9$

$$A=\begin{bmatrix}۷ & ۱ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴\\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹\end{bmatrix}$$

۱۲ صفحه ۲۰ تمرین

۲ـ اگر $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ و A=B در این صورت حاصل (x+y+z) را بیابید.

دو ماتریس برابرند اگر درایه‌های نظیرشان برابر باشند:

$$۲x-y=۳,\quad ۲x+y=۵,\quad z=-۲$$

با جمع دو معادله‌ی اول: $4x=8\Rightarrow x=2$ و سپس $y=5-4=1$. (درایه‌ی ۵ در A با ۲x+y در B و ۱ با ۱ تطبیق می‌کند.)

بنابراین $x+y+z=2+1+(-2)=1$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ صفحه ۲۰ تمرین

۳ـ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq O$ و $B\neq O$ ولی $AB=O$.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = O$$

هر دو ماتریس غیرصفرند ولی حاصل‌ضربشان ماتریس صفر است.

۱۴ صفحه ۲۰ تمرین

۴ـ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی AB=AC نمی‌توان نتیجه گرفت B=C.

مثال نقض:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad AC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس AB=AC ولی B≠C (و حتی A≠O). بنابراین قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست.

۱۵ صفحه ۲۰ تمرین

۵ـ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{(n-1)}$ $(n\in\mathbb{N}\ ،\ n>1)$ در این صورت با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

$$A^۳ = A \times A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = A$$

چون $A^2 = I$، داریم $A^7 = (A^2)^3 \times A = I \times A = A$:

$$A^۷ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد برابر A هستند.)

۱۶ صفحه ۲۱ تمرین

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب A×B ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۳a+۴ & ۲a-۸\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

ماتریس قطری باید درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی‌اش صفر باشد:

$$b-3=0\Rightarrow b=3\ ،\ -8+2a=0\Rightarrow a=4$$

در این صورت $A\times B=\begin{bmatrix}۱۶ & ۰\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}$ که قطری است.

۱۷ صفحه ۲۱ تمرین

۷ـ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times ۲}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس A×B و B×A را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases}i^{۲}-۱ & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}\quad و\quad b_{ij}=\begin{cases}i^{۲}+۱ & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+۲ & i<j\end{cases}$$

ماتریس A (۲×۳): $a_{11}=0,\ a_{22}=3,\ a_{21}=1,\ a_{31}=2,\ a_{32}=1,\ a_{12}=1$

ماتریس B (۳×۲): $b_{11}=2,\ b_{22}=5,\ b_{21}=3,\ b_{12}=1,\ b_{13}=1-3+2=0,\ b_{23}=2-3+2=1$

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۳ & ۵ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۵ & ۱\\ ۱۱ & ۱۶ & ۳\\ ۷ & ۷ & ۱\end{bmatrix}$$

ایران توشه

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۷ & ۱۹ \end{bmatrix}$$

۱۸ صفحه ۲۱ تمرین

۸ـ اگر $A = \begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس (A×B) را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فرض می‌کنیم $B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$. آنگاه:

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_۱b_{۱۱} & r_۱b_{۱۲} & r_۱b_{۱۳} \\ r_۲b_{۲۱} & r_۲b_{۲۲} & r_۲b_{۲۳} \\ r_۳b_{۳۱} & r_۳b_{۳۲} & r_۳b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

نتیجه: ضرب ماتریس قطری A از سمت چپ در ماتریس B، هر سطر B را در درایه‌ی نظیر قطر A ضرب می‌کند (سطر i ام B در r_i).

۱۹ صفحه ۲۱ تمرین

۹ـ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبه‌ی A در این صورت

الف) برای A×B و B×A قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی A×B=B×A برقرار است؟

الف) ماتریس اسکالر یعنی قطری با درایه‌های روی قطر برابر؛ پس $A = \begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix} = kI$. طبق تمرین قبل (و طبق ویژگی عضو خنثی):

$$A \times B = (kI)B = k(IB) = kB \text{، } B \times A = B(kI) = k(BI) = kB.$$

یعنی هر دو حاصل‌ضرب برابر است با ماتریسی که از ضرب عدد k در همه‌ی درایه‌های B به‌دست می‌آید.

ایران توشه

ب) بله؛ چون هر دو برابر kB هستند، تساوی A×B=B×A برقرار است.

۲۰ صفحه ۲۱ تمرین

۱۰ـ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند (A×B=B×A) ثابت کنید.

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

الف) با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

چون $AB=BA$ پس $AB+BA=2AB$ و در نتیجه $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

ب) $(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$

چون $AB=BA$ پس $AB-BA=O$ و در نتیجه $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

۲۱ صفحه ۲۱ تمرین

۱۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ **مفروض باشد. حاصل A^3 را بدست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۶\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱۶\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲۷ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۶۴\end{bmatrix}$$

نتیجه: برای ماتریس قطری، توان nام ماتریس برابر است با ماتریس قطری که درایه‌های قطر آن توان nام درایه‌های قطر ماتریس اصلی است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲۲ صفحه ۲۲ **مسئله**

مسئله: نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}$ **وارون ماتریس** $A=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ **است. کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم** $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}(-۱)(۷)+۴(۲) & (-۱)(۴)+۴(۱)\\ ۲(۷)+(-۷)(۲) & ۲(۴)+(-۷)(۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

چون $AB=BA=I$، ماتریس B وارون ماتریس A است.

۲۳ صفحه ۲۳ **مثال**

مثال: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}$ **را به‌دست آورید. ... پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.**

وارون را $A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}$ به‌دست آورده بودیم. امتحان: باید $A\times A^{-۱}=A^{-۱}\times A=I$ باشد.

$$A\times A^{-۱}=\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}\times A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ -۲ & ۵\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱۰ & ۲\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

پس پاسخ درست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۲۳ — پرسش کنار صفحه

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\neq I$$

چون $A\times B\neq I$، این دو ماتریس وارون یکدیگر نیستند. (وارون A برابر است با $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ زیرا $|A|=1\times 1-(-1)\times 2=3$.)

۲۵ صفحه ۲۳ — پرسش کنار صفحه

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$|A|=2\times 4-3\times 1=5$ پس $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

اکنون وارون A^{-1}: $|A^{-1}|=\frac{1}{25}(8-3)=\frac{1}{5}$ و

$$(A^{-1})^{-1}=5\times\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

نتیجه: $(A^{-1})^{-1}=A$ یعنی وارونِ وارونِ هر ماتریس وارون‌پذیر، خودِ آن ماتریس است.

۲۶ صفحه ۲۴ — فعالیت

دستگاه $\begin{cases}7x+4y=15\\ 2x+y=4\end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$(1)\quad \begin{bmatrix}\dots+\dots\\ 7x+4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ \dots\end{bmatrix}$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(2)\quad \begin{bmatrix}2x+y\\ 7x+4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

ایران توشه

از (۱) و (۲) $\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$. معادله‌ی ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱ـ حال اگر فرض کنیم A ($A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$) را ماتریس ضرایب می‌نامیم در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی A^{-1} را بیابید.

۲ـ معادله‌ی ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

تکمیل (۱): $\begin{bmatrix} ۲x + y \\ ۷x + ۴y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$

۱ـ $|A| = 2 \times 4 - 1 \times 7 = 8 - 7 = 1 \neq 0$ ⇒ A وارون‌پذیر است.

$$A^{-1} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲ـ دو طرف را از چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1}A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۶ - ۱۵ \\ -۲۸ + ۳۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$x = 1,\ y = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

تحقیق: $2(1) + 2 = 4$ و $7(1) + 4(2) = 15$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۲۵ **مثال (تکمیلی)**

مثال: دستگاه $-x + 2y = ۱$ ، $3x - 4y = ۱$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲} \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \\ ۲ \end{bmatrix} \longrightarrow x = \cdots,\ y = ۲$$

$$|A| = 3 \times 2 - (-4)(-1) = 6 - 4 = 2 \neq 0 \text{ ،} A^{-1} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+۲ \\ \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

پس $x = 3,\ y = 2$. (تحقیق: $3(3) - 4(2) = 1$ و $-3 + 2(2) = 1$)

۲۸ صفحه ۲۵ **پرسش کنار صفحه**

دستگاه معادلات $-۴x + ۲y = ۲$ ، $۲x - y = ۴$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟ این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

ماتریس ضرایب $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$ است و $|A| = 2 \times 2 - (-1)(-4) = 0$. پس A وارون‌پذیر نیست و نمی‌توان از ماتریس وارون استفاده کرد.

هر دو خط شیب ۲ دارند ($y = 2x - 4$ و $y = 2x + 1$) ولی عرض از مبدأهایشان متفاوت است ($\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{4}{2}$)؛ بنابراین دو خط موازی و متمایزند، نقطه‌ی مشترکی ندارند و دستگاه جواب ندارد.

۲۹ صفحه ۲۶ **کار در کلاس**

دستگاه معادلات $-۴x + ۶y = ۱$ ، $۲x - ۳y = ۳$ را در نظر بگیرید.

۱ـ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ـ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

۳ـ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $-۳x + ۹y = -۶$ ، $x - ۳y = ۲$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A| = ۰$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

۱ـ $2x - 3y = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1$ ؛ شیب $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $-4x + 6y = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ شیب $\frac{2}{3}$

شیب‌ها برابرند ولی عرض از مبدأها (-1 و $\frac{1}{6}$) متفاوتند؛ پس دو خط موازی‌اند و بر هم منطبق نیستند و دستگاه جواب ندارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲ـ $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ -۴ & ۶\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۱۲ - ۱۲ = ۰$

چون $|A| = 0$ ماتریس A وارون‌پذیر نیست (وارون ندارد).

۳ـ در دستگاه $x - 3y = 2,\ -3x + 9y = -6$: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ و $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (معادله‌ی دوم برابر ۳- ضرب معادله‌ی اول است). پس شیب‌ها و عرض از مبدأها برابر است و دو خط بر هم منطبقند؛ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ -۳ & ۹\end{bmatrix}$ با $|A| = 9 - 9 = 0$ وارون‌پذیر نیست.

نتیجه‌ی کلی: اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه ۲×۲ باشد و $|A|=۰$، آنگاه دو خط موازی‌اند و دستگاه یا جواب ندارد (دو خط موازی و متمایز، مانند حالت ۱) یا بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق، مانند حالت ۳).

۳۰ صفحه ۲۸ **پرسش کنار صفحه**

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۲\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۴ & ۲\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}۱ & ۵\\ ۲ & ۱۱\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}۲ & -۳\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

ابتدا دترمینان‌های ۲×۲ را حساب می‌کنیم: $1 = 1 \times 3 - 2 \times 2$، $6 = (-1) \times 2 - 1 \times 4$،

$1 = 2 \times 5 - 1 \times 11$ (با علامت منفی ⇒ ۱-)، $13 = 1 \times (-3) - 5 \times 2$

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ -۱ & ۱۳\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۱ \times ۱۳ - ۶ \times (-۱) = ۱۳ + ۶ = ۱۹$$

۳۱ صفحه ۲۹ **پرسش کنار صفحه**

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2 - ۵۰|A| + ۶ = ۰$ برقرار باشد.

$|A| = 3$ ای $|A| = 2 \Rightarrow (|A| - 2)(|A| - 3) = 0 \Rightarrow |A|^2 - 5|A| + 6 = 0$.

پس کافی است $ad-bc$ برابر ۲ یا ۳ باشد؛ مثلاً $(|A| = ۲)$ $a = ۲, b = ۰, c = ۰, d = ۱ \Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

یا $(|A| = ۳)$ $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow a = ۳, b = ۰, c = ۰, d = ۱$. (جواب‌ها بی‌شمارند.)

۳۲ صفحه ۲۹ کار در کلاس

۱ـ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس A×B را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

۲ـ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A| = -۶$، سپس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

نتیجه: ۱ـ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ..... ۲ـ دترمینان ماتریس مربعی صفر، ..... است.

۴ـ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A = ۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به دست آورید.

۱ـ $A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲۵ & ۱۱ \end{bmatrix}$

$|A| = 8 - (-3) = 11$ ، $|B| = 6 - 4 = 2$ ، $|AB| = 2 \times 11 - 0 \times 25 = 22$.

چون $|A||B| = 11 \times 2 = 22$ ، تساوی $|AB| = |A||B|$ برقرار است.

۲ـ مثلاً ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$ که $|A| = 1 \times 2 \times (-3) = -6$:

$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$, $|A^۲| = ۱ \times ۴ \times ۹ = ۳۶$

ایران توشه
irantooshe.ir

نتیجه: $|A^2| = |A|^2 = (-6)^2 = 36 = |A^2|$ یعنی $|A^2| = |A|^2$ (که از $|AB| = |A||B|$ با $B=A$ نیز نتیجه می‌شود).

۳ـ برحسب سطر اول: $|A| = a(bc - 0) - 0 + 0 = abc$. دستور ساروس نیز $abc + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = abc$ می‌دهد؛ برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

نتیجه: ۱ـ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با **حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی**. ۲ـ دترمینان ماتریس مربعی صفر، **صفر** است (زیرا تمام درایه‌های آن صفرند).

۴ـ $A = ۴ \times \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix}$

ماتریس A قطری است؛ پس $|A| = 2 \times 5 \times 10 = 100$. (راه دیگر: $|4D| = 4^3|D| = 64 \times \frac{25}{16} = 100$)

---

۳۳ صفحه ۳۰ **پرسش کنار صفحه**

اگر A ماتریسی ۳ × ۳ و اسکالر باشد و $a_{11} = ۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

ماتریس اسکالر، قطری با درایه‌های برابر روی قطر است؛ پس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ و $|A| = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

---

۳۴ صفحه ۳۰ **تمرین**

۱ـ اگر $A = [۱ \quad ۲ \quad -۳]$ **و** $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ **در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.**

$$AB = [۱(-۲) + ۲(-۱) + (-۳)(۳)] = [-۱۳] \Rightarrow |AB| = -۱۳$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \times [۱ \quad ۲ \quad -۳] = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

سطرهای این ماتریس ۳×۳ همگی مضربی از سطر ۳- ۱۲ هستند (سطر اول در ۲- و سطر دوم در ۱- و سطر سوم در ۳)؛ پس دترمینان آن صفر است. با ساروس نیز: $|BA| = 0$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ صفحه ۳۰ تمرین

۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}$ **در این صورت** $|A^2|$ **را به‌دست آورید.**

با بسط برحسب سطر اول (یا ستون سوم): $|A|=(-2)\times[(-3)(-5)-0]=-30$

چون $|A^2|=|A||A|=|A|^2$، داریم $|A^2|=(-30)^2=900$.

(با محاسبه‌ی مستقیم: $A^۲=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۹ & ۰\\ -۷ & ۰ & ۲۵\end{bmatrix}\Rightarrow |A^۲|=۹۰۰$)

۳۶ صفحه ۳۰ تمرین

۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۵|A| & |A|\\ ۵ & ۴|A|^۲\end{bmatrix}$ **در این صورت حاصل** $(|A|^۳-۲)$ **را بیابید.**

برای سادگی $|A|=t$ می‌نامیم. دترمینان ماتریس داده‌شده را از قاعده‌ی $|A|=ad-bc$ می‌نویسیم:

$$t=(5t)(4t^2)-(t)(5)=20t^3-5t \Rightarrow 20t^3-6t=0 \Rightarrow t(10t^2-3)=0$$

پس $t=0$ یا $t^2=\frac{3}{10}$. اگر $|A|=0$ باشد (حالت ساده و محتمل مورد نظر) آنگاه $|A|^3-2=0-2=-2$.

اگر $|A|\neq 0$ باشد $|A|=\pm\sqrt{\frac{3}{10}}$ و $|A|^3-2=\pm\frac{3}{10}\sqrt{\frac{3}{10}}-2$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ صفحه ۳۰ تمرین

۴ـ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ **را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

$$|A|=d(bc-cb)-e(ac-ca)+f(ab-ba)$$

$$|A|=d\times 0-e\times 0+f\times 0=0$$

نتیجه: اگر دو سطر یک ماتریس ۳×۳ برابر باشند، دترمینان آن صفر است.

۳۸ صفحه ۳۰ تمرین

۵ـ ماتریسی ۳ × ۳ چون A بیابید که ۳=|A|.

مثلاً ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$

$|A| = 1 \times 1 \times 3 = 3$. پاسخ یکتا نیست؛ هر ماتریس دیگری با دترمینان ۳ نیز پذیرفته است، مثلاً

$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ که با بسط برحسب ستون سوم $|A| = 1 \times (1 \times 3 - 2 \times 0) = 3$.

۳۹ صفحه ۳۱ تمرین

۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ **و** $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ **حاصل عبارت** $(۲A^{-1} - ۳B^{-1})$ **را بیابید.**

$|A| = 20 - 6 = 14 \Rightarrow A^{-1} = \frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$

$|B| = 2 + 15 = 17 \Rightarrow B^{-1} = \frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$

$$۲A^{-1} - ۳B^{-1} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{۱۰۶}{۱۱۹} & -\frac{۱۱۴}{۱۱۹} \\ \frac{۷۱}{۱۱۹} & \frac{۱۱۰}{۱۱۹} \end{bmatrix}$$

هر درایه را جداگانه حساب می‌کنیم: $\frac{106}{119} = \frac{3}{17} + \frac{5}{7}$ ، $-\frac{114}{119} = -\frac{9}{17} - \frac{3}{7}$ ، $\frac{71}{119} = \frac{15}{17} + -\frac{2}{7}$ ، $\frac{110}{119} = \frac{6}{17} + \frac{4}{7}$.

ابزار توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۰ صفحه ۳۱ | تمرین

۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ **ابتدا ماتریس** A^{-1} **را به‌دست آورده و** $|A|$ **را با** $|A^{-1}|$ **مقایسه کنید.**

$$|A| = 10 - 6 = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{2}\times\frac{5}{4} - (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

نتیجه: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (دترمینان وارون یک ماتریس، وارون دترمینان آن است).

۴۱ صفحه ۳۱ | تمرین

۸ـ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ **را در نظر بگیرید و** $|A|$ **و** $|B|$ **را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟**

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$ **بررسی کنید.**

الف) طبق ساروس:

$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$|B| = (ka)ei + (kb)fg + (kc)dh - (kc)eg - (ka)fh - (kb)di = k(aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi) = k|A|$$

نتیجه: اگر همه‌ی درایه‌های یک سطر را در عدد k ضرب کنیم، دترمینان k برابر می‌شود.

ب) $|A| = ad - bc$ ، $|B| = (ka)d - (kb)c = k(ad - bc) = k|A|$. همان نتیجه برقرار است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۲ صفحه ۳۱ تمرین

۹ـ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار |A| و |KA| را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ؛ آنگاه $KA = \begin{bmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{bmatrix}$ و

$$|KA| = (Ka)(Kd) - (Kb)(Kc) = K^2(ad - bc) = K^2|A|$$

نتیجه: برای ماتریس ۲×۲، با ضرب عدد K در همه‌ی درایه‌های ماتریس، دترمینان در K^2 ضرب می‌شود. (هر سطر یک عامل K می‌دهد.)

۴۳ صفحه ۳۱ تمرین

۱۰ـ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و |A| = ۵ در این صورت حاصل | A |A| | را بیابید.

|A|=۵ عددی ثابت است؛ پس |A|A یعنی ضرب عدد ۵ در ماتریس A، یعنی ۵A. در ماتریس ۳×۳ ضرب عدد در همه‌ی درایه‌ها، دترمینان را در 5^3 ضرب می‌کند (هر یک از سه سطر یک عامل ۵ دارد):

$$||A|A| = |5A| = 5^3|A| = 125 \times 5 = 625$$

۴۴ صفحه ۳۱ تمرین

۱۱ـ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

دستگاه با شرط $AX = B$:

$$۳x - ۵y = ۱, \quad ۴x + ۲y = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$|A| = 6 + 20 = 26، \quad A^{-1} = \frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} \\ -\frac{۲}{۱۳} \end{bmatrix}$$

پس $y = -\frac{2}{13}$ ، $x = \frac{1}{13}$. (تحقیق: $\frac{1}{13} - 5 \times (-\frac{2}{13}) = 1$ و $3 \times \frac{1}{13} + 2 \times (-\frac{2}{13}) = 0$)

۴۵ صفحه ۳۱ تمرین

۱۲ـ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $kx + 3y = 4$ ، $x - 2y = 3$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد اگر و تنها اگر دترمینان ماتریس ضرایب ناصفر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} k & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad |A| = -2k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی k به جز $-\frac{3}{2}$ دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

۴۶ صفحه ۳۱ تمرین

۱۳ـ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $2x + y = 8$ ، $3x - 5y = -1$

ب) $x + 3y = 5$ ، $-2x - 6y = 1$

پ) $2x + 3y = 2$ ، $4x - 6y = -4$

الف) $|A| = 3 + 10 = 13 \neq 0$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد:

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

یعنی $x = 3, \ y = 2$ (تحقیق: $9 - 10 = -1$ و $6 + 2 = 8$).

ب) $|A| = -6 + 6 = 0$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

ماتریس وارون‌پذیر نیست. چون $\frac{5}{1} \neq -\frac{1}{2} = \frac{3}{-6} = \frac{1}{-2}$ دو خط موازی و متمایزند؛ دستگاه **جواب ندارد**.

پ) $|A| = 12 - 12 = 0$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ماتریس وارون‌پذیر نیست. چون $\frac{1}{2}- = \frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}$ دو خط بر هم منطبقند؛ دستگاه **بی‌شمار جواب** دارد (مثلاً $x = \frac{3y - 2}{2}$ با $y \in \mathbb{R}$؛ $2x - 3y = -2$).

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir