پاسخ‌نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	دوهفته‌ای مرحله دوم
۱۴۰۵-۰۶	۲۲/آبان/۱۴۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	علی افضل‌زاده
هندسه	امیرحسین ابومحبوب ـ سعید قندچی
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	سوگند روشنی ـ سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی ـ هادی حمزه‌پور ـ علیرضا جباری ـ رضا سبزمیدانی ـ نوید شاهی
شیمی	علی رفیعی ـ سروش عبادی ـ هادی عبادی ـ علیرضا عبداللهی ـ یاسر عبداللهی ـ محمد عظیمیان زواره امیر قاسمی‌پور ـ محمد قهرمانی‌نژاد ـ محسن مجنونی ـ امیرحسین مسلمی ـ مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ‌نامه	ناظران علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	علی افضل‌زاده	علی افضل‌زاده	عادل حسینی	سروش موئینی عادل حسینی مازیار احمدی‌ناو	محمدجواد حاجی ملا میرزایی زهرا جالینوسی منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
هندسه	سعید قندچی	سعید قندچی	سعید قندچی	امیرحسین ابومحبوب محمد خندان	منصور زرکش اصفهانی ماهک کناره ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	سعید قندچی	سروش موئینی	سروش موئینی	سید عباس حسینی	مریم نظری منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری ماهان فنی‌فر محمدجواد حاجی ملا میرزایی
فیزیک	رضا سبزمیدانی	یاشار انگوتی هادی حمزه‌پور	علیرضا جعفری‌آثار محمدجواد سورچی	علیرضا جباری هادی نجفی	مدیا عیدی امیر محمودی انزابی هادی داودوندی
شیمی	یاسر عبداللهی	یاسر عبداللهی	سروش عبادی یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده پارسا فراهانی	عرشیا شفیعی علیرضا فرضعلی‌زاده فاطمه ورسه

مدیر تألیف آزمون: دکتر فاطمه آقاجان‌پور

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Azmoonkheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ عادل حسینی ـ مینا کریم‌زاده

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ زهرا صفری الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری ـ محیا غنی‌فرد ساناز فلاحی ـ نادره نازآوری ـ ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	مریم حسین‌زاده ـ سپیده سخائی ـ الهام سهرابی طاهره صادق‌نژاد ـ مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته فاطمه قیاسوند ـ مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

Azmoonkheilisabz.com

۱ اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^{۱۷}-۹x^{۱۵}+kx+۱۵$ بر چندجمله‌ای $x+۳$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(۲x+۱)$ بر $x-۱$ کدام است؟

باقی‌مانده صفر است.

۱) ۲۴

۲) ۲۷

۳) ۳۰

۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: $p(x)$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $p(-۳)$ برابر صفر است:

$$p(-۳)=(-۳)^{۱۷}-۹(-۳)^{۱۵}+(-۳)k+۱۵$$

$$=-۳^{۱۷}+۳^{۲}\times۳^{۱۵}-۳k+۱۵=۰-۳k+۱۵=۰ \Rightarrow k=۵$$

گام دوم: در نتیجه $p(x)=x^{۱۷}-۹x^{۱۵}+۵x+۱۵$ است و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(۲x+۱)$ بر $x-۱$ برابر $p(۳)$ است:

$$p(۳)=۳^{۱۷}-۹\times۳^{۱۵}+۵\times۳+۱۵=۰+۱۵+۱۵=۳۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^۴+۳x^۳+۲x^۲-۵x+۱$ بر چندجمله‌ای $x^۲-۱$ برابر $r(x)$ باشد، $r(۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مقسوم‌علیه، یک چندجمله‌ای درجه‌دوم است، پس چندجمله‌ای باقی‌مانده حداکثر از درجه‌یک است و می‌توانیم آن را $r(x)=\alpha x+\beta$ در نظر بگیریم.

$$f(x)=(x-۱)(x+۱)q(x)+\alpha x+\beta$$

گام دوم: حالا $x=۱$ و $x=-۱$ را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=-۱: f(-۱)=۰-\alpha+\beta \xrightarrow{f(-۱)=۶} -\alpha+\beta=۶ \\ x=۱: f(۱)=۰+\alpha+\beta \xrightarrow{f(۱)=۲} \alpha+\beta=۲ \end{cases}$$

از دستگاه معادلات بالا، $\beta=۴$ و $\alpha=-۲$ به دست می‌آید. یعنی $r(x)=-۲x+۴$ است.

گام سوم: حالا $r(۲)$ برابر می‌شود با:

$$r(۲)=-۴+۴=۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ به‌ازای کدام مقدار m، خط $y = ۲۰$ بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۹x^۲ + ۲۷x + m$ مماس است؟

۱) ۲۰
۲) -۲۰
۳) ۷
۴) -۷

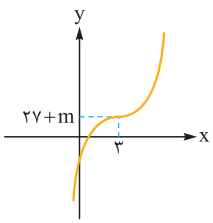
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = x^۳ - ۹x^۲ + ۲۷x + m = (x-۳)^۳ + ۲۷ + m$$

گام دوم: نمودار تابع f مطابق شکل زیر است:



تنها خط افقی مماس بر نمودار تابع f خط $y = ۲۷ + m$ است؛ بنابراین طبق فرض $۲۷ + m$ باید برابر ۲۰ باشد:

$$۲۷ + m = ۲۰ \Rightarrow m = -۷$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴ اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; \quad x<1 \\ 2x^2-3x+6 & ; \quad x\geq 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا باشد، زوج مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

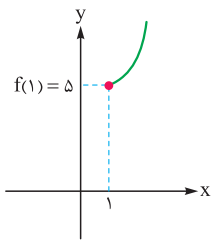
۱) $(3,4)$ ۲) $(2,3)$

۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,2)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع f روی بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی است:



دقت کنید که طول رأس سهمی $y=2x^2-3x+6$ برابر $x_S=\frac{3}{4}$ است.

گام دوم: حالا برای این‌که تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا باشد، لازم است روی بازهٔ $(-\infty,1)$ نیز اکیداً صعودی باشد، یعنی شیب خط $y=ax+b$ مثبت باشد:

(۱) $a>0$

گام سوم: از طرفی عرض نقطهٔ $x=1$ روی خط $y=ax+b$ نباید از ۵ بزرگ‌تر باشد:

(۲) $a+b\leq 5$

گام چهارم: شروط (۱) و (۲) فقط در گزینهٔ (۲) صدق می‌کند؛ هم a مثبت است و هم $a+b$ از ۵ بزرگ‌تر نیست.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

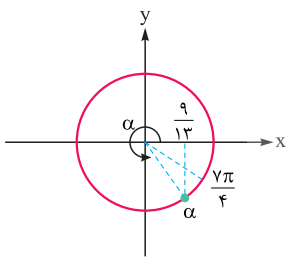
۵ **اگر انتهای زاویهٔ α روی دایرهٔ مثلثاتی در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات و $\cos\alpha = \frac{۹}{۱۳}$ باشد، انتهای زاویهٔ ۲α در کدام ناحیه است؟**

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر است:



دقت کنید که $\frac{\sqrt{۲}}{۲} > \frac{۹}{۱۳}$ است؛ بنابراین $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < \frac{۷\pi}{۴}$ است.

گام دوم: این یعنی $۳\pi < ۲\alpha < \frac{۷\pi}{۲}$ است؛ در نتیجه انتهای کمان ۲α روی دایرهٔ مثلثاتی، در ناحیهٔ سوم دستگاه مختصاتی قرار دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ اگر $۳\sin\alpha = ۲\cos\alpha$ و $۳\tan\alpha = m\cot\alpha$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

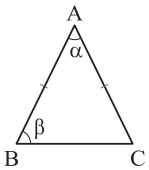
گام اول: از تساوی $۳\sin\alpha = ۲\cos\alpha$، به سادگی نتیجه می‌گیریم که $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۲}{۳}$ است.

گام دوم: در نتیجه $\cot\alpha = \frac{۳}{۲}$ است و داریم:

$$\xrightarrow{۳\tan\alpha = m\cot\alpha} ۳\times\frac{۲}{۳} = \cancel{m}\times\frac{۳}{۲} \Rightarrow m = \frac{۲}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷ در مثلث متساوی‌الساقین اگر $\sin\alpha = ۰/۲۸$ باشد، مقدار $\tan\beta$ کدام است؟



$\frac{۷}{۲۵}$

۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۱۴}{۳}$

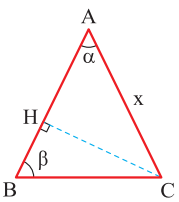
۳) ۱۴

۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ارتفاع CH رو رسم کنین.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** $۰/۲۸$ همان $\frac{۷}{۲۵}$ است، حالا ارتفاع وارد بر ساق AB را رسم می‌کنیم:

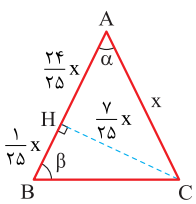


اگر طول ساق‌ها را x بگیریم، طول ارتفاع CH برابر خواهد بود با:

$$CH = AC\sin\alpha \Rightarrow CH = x\times\frac{۷}{۲۵}$$

از آن‌جا که $۲۵^۲ = ۲۴^۲ + ۷^۲$ است، طول ضلع AH برابر $AC\cos\alpha = \frac{۲۴}{۲۵}x$ است.

گام دوم: در نتیجه $BH = \frac{۱}{۲۵}x$ است:

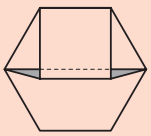


در نتیجه، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم:

$$\tan\beta = \frac{CH}{BH} = \frac{\frac{۷}{۲۵}x}{\frac{۱}{۲۵}x} = ۷$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸ در شکل زیر، یک شش‌ضلعی منتظم رسم شده است. اگر مساحت مربع شکل برابر $۲+\sqrt{۳}$ باشد، مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده کدام است؟



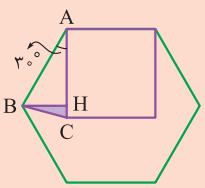
۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۱/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ‌خیلی‌تشریحی

گام اول: طول اضلاع مربع و در نتیجه طول اضلاع شش‌ضلعی منتظم برابر $x=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$ است.

گام دوم: هر زاویهٔ داخلی یک شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است، پس در شکل زیر $B\hat{A}H=۳۰^\circ$ است:



مساحت مثلث ABC برابر می‌شود با:

$$\xrightarrow{AB=AC=x} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}x^۲\sin ۳۰^\circ=\frac{x^۲}{۴}$$

از طرفی $BH=\frac{x}{۲}$ و $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x$ است؛ در نتیجه:

$$S_{ABH}=\frac{۱}{۲}BH\times AH=\frac{\sqrt{۳}}{۸}x^۲$$

گام سوم: این یعنی مساحت مثلث BHC برابر می‌شود با:

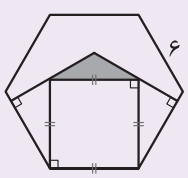
$$S_{BHC}=S_{ABC}-S_{ABH}=\frac{x^۲}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۸}x^۲=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۸}x^۲$$

و در نتیجه، مساحت سطح موردنظر سؤال، برابر $۲(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۸}x^۲)=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است.

گام چهارم: حالا به جای $x^۲$ عدد $۲+\sqrt{۳}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴}\times(۲+\sqrt{۳})=\frac{۴-۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

کنکور در شش‌ضلعی منتظم زیر، مساحت ناحیهٔ هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟ (سؤال ۱۳۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)



۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۳
۴) ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹ محیط ناحیه‌ای درون دایرهٔ مثلثاتی که در نامعادلهٔ $۲y > ۲$ صدق می‌کند، کدام است؟

$y > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱) $\pi + \frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\pi + ۱}{۲}$

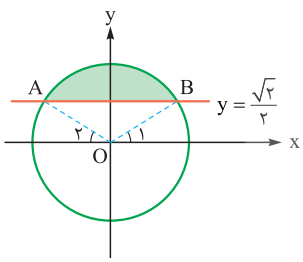
۳) $\frac{\pi}{۲} + \sqrt{۲}$

۴) $\pi + \sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: دایرهٔ مثلثاتی و خط $y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



در شکل بالا، محیط سطح رنگ‌شده، مطلوب سؤال است. در این شکل، $A\hat{O}B = ۹۰^\circ$ است؛ زیرا $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = ۴۵^\circ$ است.

گام دوم: محیط ناحیهٔ رنگ‌شده برابر است با:

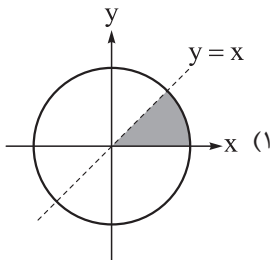
$$P = AB + \overset{\frown}{AB} = ۲\cos ۴۵^\circ + ۱ \times \frac{\pi}{۲} \Rightarrow P = \sqrt{۲} + \frac{\pi}{۲}$$

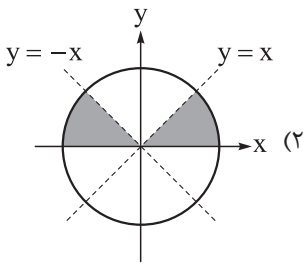
شعاع دایره

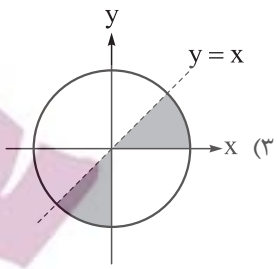
AOB برحسب رادیان

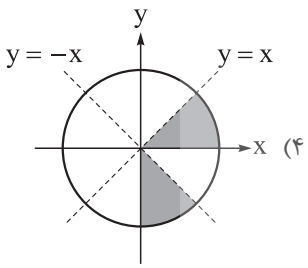
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰ اگر $\sin\alpha < \tan\alpha < \sqrt{۲}\cos\alpha$ باشد، انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق کدام شکل است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

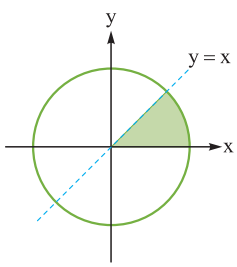
گام اول: اگر انتهای کمان α روی دایرهٔ مثلثاتی، در ناحیه‌های اول یا سوم دایرهٔ دستگاه مختصات باشد، $\sin\alpha < \tan\alpha$ است.

گام دوم: حالا باید نامعادلهٔ $\tan\alpha < \sqrt{۲}\cos\alpha$ را حل کنیم. این نامعادله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) انتهای کمان α در ناحیهٔ اول باشد:

$$\xrightarrow{\sin\alpha,\cos\alpha>۰} \sin\alpha < \sqrt{۲}\cos^۲\alpha \Rightarrow \sin\alpha < \sqrt{۲} - \sqrt{۲}\sin^۲\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}\sin^۲\alpha + \sin\alpha - \sqrt{۲} < ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -\sqrt{۲} < \sin\alpha < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \xrightarrow{\sin\alpha>۰} ۰ < \sin\alpha < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



ب) انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم باشد:

$$\xrightarrow{\sin\alpha,\cos\alpha<۰} \sin\alpha > \sqrt{۲}\cos^۲\alpha \Rightarrow \sin\alpha > \sqrt{۲} - \sqrt{۲}\sin^۲\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}\sin^۲\alpha + \sin\alpha - \sqrt{۲} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha < -\sqrt{۲} & \text{غیرممکن} \times \\ \sin\alpha > \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \end{cases}$$

غ‌ق‌ق: در ناحیهٔ سوم $\sin\alpha$ منفی است.

در نتیجه، شکل گزینهٔ (۱) درست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱ اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، حاصل عبارت $۸\frac{\cos(\frac{۲\pi}{۷}-\alpha)}{\sin(\frac{۳\pi}{۱۴}+\alpha)}+۵\frac{\sin(۱۴۰^\circ+\alpha)}{\cos(۵۰^\circ+\alpha)}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) -۱۳ ۳) -۳ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: زوایای $\frac{۲\pi}{۷}$ و $\frac{۳\pi}{۱۴}$ متمم یکدیگرند، پس داریم:

$$\frac{۲\pi}{۷}-\alpha=\frac{\pi}{۲}-(\frac{۳\pi}{۱۴}+\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{۲\pi}{۷}-\alpha)=\cos(\frac{\pi}{۲}-(\frac{۳\pi}{۱۴}+\alpha))=\sin(\frac{۳\pi}{۱۴}+\alpha)$$

پس $\frac{\cos(\frac{۲\pi}{۷}-\alpha)}{\sin(\frac{۳\pi}{۱۴}+\alpha)}=۱$ است.

گام دوم: از آن‌جا که $۱۴۰^\circ=۵۰^\circ+۹۰^\circ$، داریم:

$$۱۴۰^\circ+\alpha=۵۰^\circ+\alpha+۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(۱۴۰^\circ+\alpha)=\sin(۵۰^\circ+\alpha+۹۰^\circ)=\cos(۵۰^\circ+\alpha)$$

پس $\frac{\sin(۱۴۰^\circ+\alpha)}{\cos(۵۰^\circ+\alpha)}=۱$ است. در نتیجه، خواستهٔ سؤال برابر $۸\times۱+۵\times۱=۱۳$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ اگر $\sin\alpha\sin\beta=\frac{۴}{۱۳}$ و $\tan\alpha\tan\beta=\frac{۵}{۹}$ باشد، حاصل $\cos(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۶۵}$ ۲) $\frac{۵۶}{۶۵}$ ۳) $\frac{۵}{۱۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از تساوی $\tan\alpha\tan\beta=\frac{۵}{۹}$، حاصل $\cos\alpha\cos\beta$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\frac{۴}{۱۳}}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta=\frac{\frac{۴}{۱۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۳۶}{۶۵}$$

گام دوم: حالا از اتحاد کسینوس مجموع کمان استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{۳۶}{۶۵}-\frac{۴}{۱۳}=\frac{۱۶}{۶۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳ اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۳}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $۱۵\sin ۲\alpha$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲-۳\sqrt{۲}$

۲) $۱+۲\sqrt{۲}$

۳) $۴+۶\sqrt{۲}$

۴) $۲-۴\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱}\begin{cases}\cos^۲(\alpha+\beta)=\frac{۸}{۹}\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\\ \cos^۲(\alpha-\beta)=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\pm\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

گام دوم: حالا از آن‌جا که $۲\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$ است، از اتحاد سینوس مجموع کمان استفاده می‌کنیم:

$$\sin ۲\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۳}(\pm\frac{۴}{۵})+(\pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})(\frac{۳}{۵})$$

گام سوم: با در نظر گرفتن علامت‌های مثبت و منفی $\sin ۲\alpha$ می‌تواند مقادیر $\frac{۴+۶\sqrt{۲}}{۱۵}$، $\frac{۴-۶\sqrt{۲}}{۱۵}$، $\frac{-۴+۶\sqrt{۲}}{۱۵}$ یا $-\frac{۴+۶\sqrt{۲}}{۱۵}$ را بپذیرد؛ در نتیجه حاصل $۱۵\sin ۲\alpha$ می‌تواند $۴+۶\sqrt{۲}$، $۴-۶\sqrt{۲}$، $-۴+۶\sqrt{۲}$ یا $-۴-۶\sqrt{۲}$ باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ معادلهٔ $۳\sin x = ۲\sqrt[۳]{x}$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

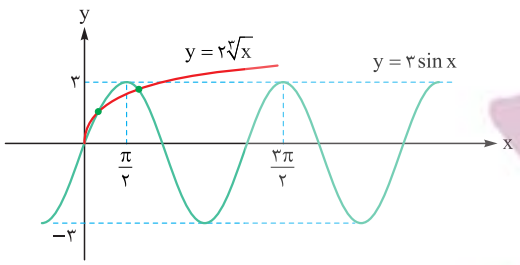
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بدیهی است که $x = ۰$ جواب معادله است. از آن‌جا که نمودارهای دو تابع $y = ۲\sqrt[۳]{x}$ و $y = ۳\sin x$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند، اگر $x = \alpha$ جواب معادله باشد، قطعاً $x = -\alpha$ نیز جواب معادله است.

در نتیجه، اگر معادله در xهای مثبت، n جواب داشته باشد، تعداد کل جواب‌های معادله، $۲n+۱$ است.

گام دوم: حالا نمودارهای دو تابع $y = ۲\sqrt[۳]{x}$ و $y = ۳\sin x$ را در یک دستگاه مختصات (در xهای مثبت) رسم می‌کنیم:



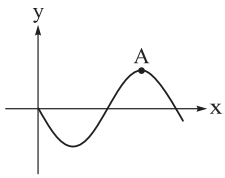
دقت کنید که $۲\sqrt[۳]{\frac{\pi}{۲}} < ۳$ است، زیرا داریم:

$$۲\sqrt[۳]{\frac{\pi}{۲}} < ۳ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{۴\pi} < ۳ \Leftrightarrow ۴\pi < ۲۷$$

گام سوم: همان‌طور که مشخص است دو تابع، دو نقطهٔ مشترک با طول مثبت دارند، در نتیجه، تعداد جواب‌های معادلهٔ صورت سؤال برابر ۵ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵ نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ در شکل زیر رسم شده است. اگر مختصات نقطهٔ ماکزیمم A به صورت $A(۶,۴)$ باشد، حاصل $a \times b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) -۱

۳) π

۴) $-\pi$

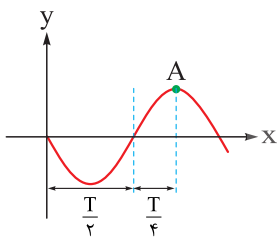
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عرض نقطهٔ A برابر مقدار ماکزیمم تابع است:

$$|a| = ۴ \Rightarrow a = \pm ۴$$

گام دوم: از طرفی طول نقطهٔ A، $\frac{۳}{۴}$ دوره تناوب تابع است:



$$\frac{۳T}{۴} = ۶ \Rightarrow T = ۸$$

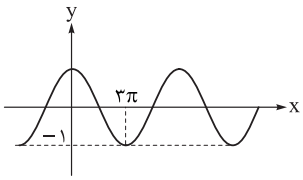
حالا مقدار $|b|$ را پیدا می‌کنیم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|\pi} = ۸ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۴}$$

گام سوم: اما چون تابع در $x = ۰$ اکیداً نزولی است، پس a و b غیرهم‌علامت‌اند؛ در نتیجه $a \times b = -۱$ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ بخشی از نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۲\sin(\frac{\pi}{۲}+mx)+k$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $f(\frac{۶۳\pi}{۴})$ کدام است؟



۱) $۱+\sqrt{۲}$

۲) $۱-\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}-۱$

۴) $-۱-\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=۲\cos mx+k$$

کم‌ترین مقدار تابع برابر -۱ است:

$$y_{min}=-۲+k=-۱ \Rightarrow k=۱$$

گام دوم: از طرفی مطابق شکل، نصف دوره تناوب تابع برابر ۳π است:

$$\frac{T}{۲}=۳\pi \Rightarrow T=۶\pi$$

و داریم:

$$\frac{۲\pi}{|m|}=۶\pi \Rightarrow |m|=\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۳}$$

گام سوم: هر دو مقدار m قابل قبول‌اند و ضابطهٔ تابع را می‌توانیم $f(x)=۲\cos\frac{x}{۳}+۱$ در نظر بگیریم. حالا خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$f(\frac{۶۳\pi}{۴})=۲\cos\frac{۲۱\pi}{۴}+۱=۲\cos(۵\pi+\frac{\pi}{۴})+۱=-۲\cos\frac{\pi}{۴}+۱=-۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+۱=۱-\sqrt{۲}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷ تابع متناوب f با دوره تناوب ۴ مفروض است. اگر ضابطهٔ قسمتی از این تابع $f(x)=\begin{cases}-2x & ; \quad -2<x<0\\ 2 & ; \quad 0\le x\le 2\end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود به نمودار این تابع و محور طول‌ها در بازهٔ $[-16,-12]$ کدام است؟

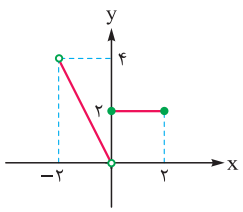
یک دوره تناوب

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

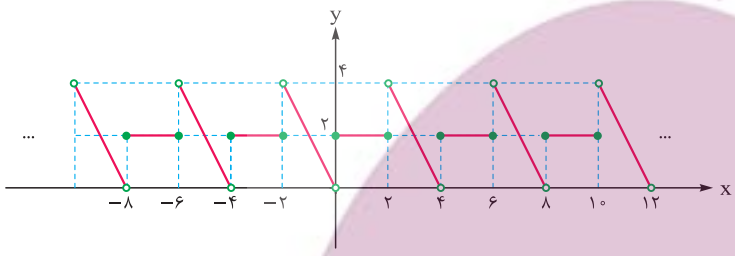
پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نمودار تابع را در بازهٔ $[-2,2)$ رسم می‌کنیم:



پس نمودار تابع روی $\mathbb{R}$ مطابق شکل زیر است:



گام دوم: مساحت سطح زیر نمودار تابع f با محور x در یک دوره تناوب آن برابر است با:

$$S=2\times 2+\frac{2\times 4}{2}=4+4=8$$

گام سوم: از آن‌جا که طول بازهٔ $[-16,-12]$ نیز برابر یک دوره تناوب است، مساحت سطح محدود به نمودار تابع f و محور طول‌ها در این بازه برابر ۸ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(\sin ۱۰^\circ)^{۱۲-۴x} > \cos^۲ ۱۰۰^\circ$ کدام است؟

۱) $(\frac{۵}{۲}, +\infty)$ ۲) $(-\infty, \frac{۵}{۲})$

۳) $(۶, +\infty)$ ۴) $(-\infty, ۶)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint به کمک یکنوایی حل کن.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا نامعادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos^۲ ۱۰۰^\circ = \cos^۲(۹۰^\circ + ۱۰^\circ) = (-\sin ۱۰^\circ)^۲ = \sin^۲ ۱۰^\circ$$

بنابراین داریم:

$$(\sin ۱۰^\circ)^{۱۲-۴x} > \sin^۲ ۱۰^\circ \Rightarrow (\sin^۲ ۱۰^\circ)^{۶-۲x} > \sin^۲ ۱۰^\circ$$

گام دوم: تابع f را با ضابطهٔ $f(x) = (\sin^۲ ۱۰^\circ)^x$ مفروض می‌گیریم. حالا نامعادلهٔ صورت سؤال به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(۶-۲x) > f(۱)$$

گام سوم: حالا چون تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ بالا، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۶-۲x < ۱$ است:

$$\Rightarrow ۲x > ۵ \Rightarrow x > \frac{۵}{۲}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & a \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای کدام مقدار a، تساوی $|A+B|=|A|+|B|$ برقرار است؟

۱) هیچ مقدار a
۲) $a=۰/۶$
۳) $a=-۱$
۴) همهٔ مقادیر a

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|=ad-bc$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مقادیر $|A|$ و $|B|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۲a+۱ \quad , \quad |B|=\begin{vmatrix} ۰ & a \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}=-۳a$$

گام دوم: ماتریس $A+B$ و دترمینان آن را محاسبه می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix} a & a+۱ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A+B|=۶a-۲(a+۱)=۴a-۲$$

گام سوم: اگر بخواهیم $|A+B|=|A|+|B|$، باید:

$$۴a-۲=(۲a+۱)-۳a \Rightarrow ۵a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۱ \\ m+۲ & |A| \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مجموع مقادیر امکان‌پذیر برای m، کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

مشاوره این مدل سؤال‌ها، در امتحان‌های نهایی بسیار پرتکرار و مرسوم هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint
باید $|A|=۰$

درس Box
شرط وارون‌پذیربودن یک ماتریس مربعی آن است که $|A|\neq ۰$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از طرفین معادلهٔ $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۱ \\ m+۲ & |A| \end{bmatrix}$، دترمینان می‌گیریم تا $|A|$ را برحسب m، به دست آوریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & m-۱ \\ m+۲ & |A| \end{vmatrix} \Rightarrow |A|=۲|A|-(m-۱)(m+۲) \Rightarrow |A|=(m-۱)(m+۲)$$

گام دوم: می‌دانیم ماتریس مربعی A زمانی وارون‌پذیر نیست که $|A|=۰$، پس:

$$(m-۱)(m+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۱ \\ m=-۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} ۱-۲=-۱$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $A^۳ = ۴I$، آن‌گاه وارون ماتریس $A^۲ - A + I$، برابر با کدام ماتریس است؟

۱) $\frac{۱}{۵}(A + I)$

۲) $\frac{۱}{۳}(A - I)$

۳) $\frac{۱}{۳}(A + I)$

۴) $\frac{۱}{۵}(A - I)$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint ماتریس $I^۳$ را به طرفین تساوی $A^۳ = ۴I$ اضافه کنید.

درس Box

۱) ماتریس I با همهٔ ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه با آن، تعویض‌پذیر است، پس اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن باشد، اتحادهای جبری برای آن دو برقرار است، یعنی مثلاً داریم:

$$A^۳ + I^۳ = (A + I)(A^۲ - AI + I^۲)$$

۲) اگر I ماتریس همانی و n عددی طبیعی باشد، داریم $I^n = I$.

۳) اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس مربعی، برابر با ماتریس همانی باشد، آن دو ماتریس وارون هم هستند، یعنی اگر $AB = I$، آن‌گاه $A = B^{-۱}$ و $B = A^{-۱}$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طرفین معادلهٔ $A^۳ = ۴I$ را با I جمع می‌کنیم، خواهیم داشت $A^۳ + I = ۵I$، با توجه به این‌که $I = I^۳$، می‌توانیم بگوییم $A^۳ + I^۳ = ۵I$.

گام دوم: اتحادهای جبری برای A و I برقرار است، پس:

$$A^۳ + I^۳ = (A + I)(A^۲ - AI + I^۲)$$

گام سوم: در نهایت داریم:

$$(A + I)(A^۲ - A + I) = ۵I \Rightarrow \frac{۱}{۵}(A + I)(A^۲ - A + I) = I$$

بنابراین:

$$(A^۲ - A + I)^{-۱} = \frac{۱}{۵}(A + I)$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A^{-۱}+۲AB=\frac{۱}{۲}I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B، کدام است؟

۱) ۱/۷۵ ۲) −۱/۷۵

۳) ۱/۲۵ ۴) −۱/۲۵

مشاوره در این‌گونه سؤال‌ها، باید سعی کنید با ضرب طرفین تساوی در ماتریس مناسب، ماتریس مجهول را بدون ضریب کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طرفین معادلهٔ $A^{-۱}+۲AB=\frac{۱}{۲}I$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$A^{-۱}(A^{-۱}+۲AB)=A^{-۱}(\frac{۱}{۲}I)\Rightarrow A^{-۱}.A^{-۱}+۲\underbrace{A^{-۱}A}_{I}B=\frac{۱}{۲}\underbrace{A^{-۱}.I}_{A^{-۱}}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱})^{۲}+۲B=\frac{۱}{۲}A^{-۱}\Rightarrow ۲B=\frac{۱}{۲}A^{-۱}-(A^{-۱})^{۲}\Rightarrow B=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}A^{-۱}-(A^{-۱})^{۲})\ (*)$$

گام دوم: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$، آن‌گاه:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱\times ۳-۱\times ۴}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}$$

گام سوم: ماتریس $(A^{-۱})^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(A^{-۱})^{۲}=\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & ۱\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳ & -۴\\ -۱۶ & ۵\end{bmatrix}$$

پس با توجه به (*)، داریم:

$$B=\frac{۱}{۲}(\begin{bmatrix}-۱/۵ & ۰/۵\\ ۲ & -۰/۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱۳ & -۴\\ -۱۶ & ۵\end{bmatrix})=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}-۱۴/۵ & ۴/۵\\ ۱۸ & -۵/۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس B، برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}(-۱۴/۵+۴/۵+۱۸-۵/۵)=\frac{۱}{۲}\times ۲/۵=۱/۲۵$$

کنکور فرض کنید $A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲}\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و ماتریس X، جواب معادلهٔ $AX=A^{-۱}$، باشد. ماتریس X، کدام است؟

(سؤال ۱۳۸ کنکور ریاضی ۹۹ (خارج از کشور))

۱) $\begin{bmatrix}-۳۲ & ۱۴\\ ۴۸ & -۲۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۳۲ & -۱۴\\ -۵۶ & ۲۵\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}۱۶ & -۷\\ -۲۸ & ۲۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱۶ & -۷\\ -۲۵ & ۱۴\end{bmatrix}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۳ دستگاه $\begin{cases} ۳x+۲y=-۱ \\ ۷x+۶y=۳ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. اگر A، X و B به ترتیب ماتریس‌های ضرایب، مقادیر مجهول و مقادیر ثابت این دستگاه باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}B+AX$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint $AX=B \Rightarrow X=A^{-۱}B$

درس Box دستگاه دو معادله ـ دو مجهول $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را می‌توان به فرم ماتریسی به صورت $AX=B$ نوشت که در آن $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب، $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهول‌ها و $B=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر ثابت نامیده می‌شود که در این صورت داریم $X=A^{-۱}B$.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به درس باکس، $A^{-۱}B$ برابر با X و AX برابر با B است، پس حاصل $X+B$ را می‌خواهیم.

گام دوم: ماتریس $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$، جواب دستگاه است، پس دستگاه را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳x+۲y=-۱ \\ ۷x+۶y=۳ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۳)} \begin{cases} -۹x-۶y=۳ \\ ۷x+۶y=۳ \end{cases}$$

جمع: $-۲x=۶ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow y=۴$

گام سوم: بنابراین داریم:

$$X+B=\begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

پس، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{-۱}B+AX$ برابر است با $-۴+۷=۳$.

امتحان نهایی اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دومعادله و دومجهولی $\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۳y=۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX=B$ ماتریس X را به دست آورید. *(سؤال ۵ ـ امتحان نهایی دی ۱۴۰۰)*

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - y = k^2 \\ 3x + (2-a)y = 2k - 1 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، آن‌گاه چند مقدار متمایز برای k وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint با استفاده از شرط وجود بی‌شمار جواب برای دستگاه، ابتدا مقادیر ممکن برای a را محاسبه کنید.

درس Box دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید. هر کدام از دو معادلهٔ سازندهٔ این دستگاه در واقع معادلهٔ یک خط در دستگا مختصات است، بنابراین جواب دستگاه، همان نقطه یا نقاط تلاقی دو خط است. تعداد جواب‌های دستگاه، مطابق شرایط زیر تعیین می‌شود:

۱) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، آن‌گاه دو خط، متقاطع هستند و دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

۲) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، آن‌گاه دو خط، موازی یکدیگرند و دستگاه جواب ندارد.

۳) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$، آن‌گاه دو خط، بر یکدیگر منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** شرط وجود بی‌شمار جواب را برای این دستگاه می‌نویسیم:

$$\frac{a}{3} = \frac{-1}{2-a} = \frac{k^2}{2k-1}$$

ابتدا با حل معادلهٔ سمت چپ، مقادیر ممکن برای a را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{a}{3} = \frac{-1}{2-a} \Rightarrow a(2-a) = -3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

گام دوم: مقادیر به‌دست‌آمده برای a را در معادلهٔ سمت راست جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a = 3 \Rightarrow \frac{-1}{-1} = \frac{k^2}{2k-1} \Rightarrow k^2 = 2k - 1 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

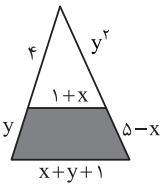
$$a = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} = \frac{k^2}{2k-1} \Rightarrow 3k^2 = -2k + 1 \Rightarrow 3k^2 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow (3k-1)(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \\ k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \end{cases}$$

بنابراین در مجموع، ۳ مقدار متمایز برای k وجود دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵ چهارضلعی رنگ‌شده در شکل زیر، ذوزنقه است. نسبت مساحت این ذوزنقه به مساحت مثلث کوچک‌تر، کدام است؟



۱) ۰/۸
۲) ۰/۹
۳) ۱/۵
۴) ۱/۲۵

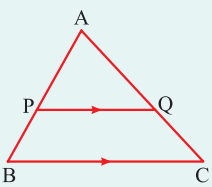
مشاوره در این سؤال، مبحث قضیهٔ تالس در مثلث، با دو مبحث نسبت مساحت‌های مثلث‌های متشابه و خواص تناسب، ترکیب شده است. در هندسهٔ پایه، احتمال مواجه‌شدنتان با سؤال‌های ترکیبی بسیار زیاد است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا به کمک قضیهٔ تالس، مقادیر x و y را به دست آورید.

درس Box

۱) قضیهٔ تالس در مثلث و تعمیم آن: در شکل زیر که $PQ \parallel BC$، داریم:



۱) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$ (قضیهٔ تالس)

۲) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ (تعمیم قضیهٔ تالس)

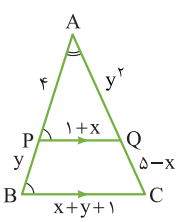
۲) اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند، یعنی زاویهٔ سوم آن دو هم با هم برابر است و اضلاع روبه‌روی زاویه‌های برابر، با هم متناسب‌اند.

۳) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، با مجذور نسبت اضلاع متناظر آن‌ها برابر است.

۴) اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ (خاصیت تفضیل در مخرج).

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از این‌که چهارضلعی PQCB ذوزنقه است، نتیجه می‌گیریم $PQ \parallel BC$، پس بنا به قضیهٔ تالس و تعمیم آن مثلث ABC، داریم:



$$\frac{AP}{AB}=\frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{y+۴}=\frac{۱+x}{y+(۱+x)} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۴}{y}=\frac{۱+x}{y}$$

$$\Rightarrow ۱+x=۴ \Rightarrow x=۳$$

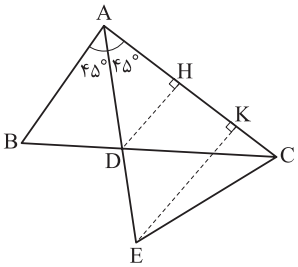
$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۵-۳} \Rightarrow y^۳=۸ \Rightarrow y=۲$$

گام دوم: دو مثلث APQ و ABC متشابه‌اند $(\hat{A}=\hat{A}, \hat{B}=A\hat{P}Q)$، پس داریم:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=(\frac{AP}{AB})^۲ \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=(\frac{۴}{۶})^۲ \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{ABC}-S_{APQ}}=\frac{۴}{۹-۴} \Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{PQCB}}=\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{PQCB}}{S_{APQ}}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

۲۶ اگر در شکل زیر، $2BC = 3AB$ و $CD = CE$، آن‌گاه حاصل $\frac{EK}{DH}$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $\frac{4}{3}$

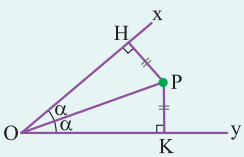
مشاوره همان‌طور که در مشاورهٔ سؤال قبل گفتیم، در هندسهٔ پایه، احتمال مواجهه با سؤال‌های ترکیبی، بسیار زیاد است. در این سؤال، مبحث نسبت اجزای فرعی در مثلث‌های متشابه، با مبحث خاصیت نیمساز زاویه، ترکیب شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint AD نیمساز زاویهٔ A است، پس D از AB و AC به یک فاصله است.

درس Box

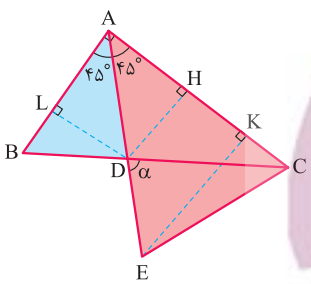
۱) اگر نقطه‌ای بر نیمساز یک زاویه واقع باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است:



۲) اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت ارتفاع‌های نظیر آن‌ها، برابر با نسبت اضلاع نظیر آن‌ها است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به $2BC = 3AB$، می‌توانیم فرض کنیم $AB = 2x$ و $BC = 3x$، پس بنا به قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، خواهیم داشت $AC = \sqrt{5}x$.



گام دوم: از $CD = CE$ نتیجه می‌گیریم مثلث CDE متساوی‌الساقین است، پس $C\hat{D}E = C\hat{E}D = \alpha$ و از آن‌جا که $A\hat{D}B$ با CDE متقابل به رأس است، داریم $A\hat{D}B = \alpha$.

گام سوم: نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}C$ واقع و در نتیجه از دو ضلع آن به یک فاصله است، پس $DH = DL$.

گام چهارم: دو مثلث ABD و AEC بنا به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند ($A\hat{D}B = A\hat{E}C = \alpha$, $B\hat{A}D = E\hat{A}C = 45^\circ$)

پس DL و EK دو ارتفاع متناظر این مثلث هستند و داریم:

$$\frac{EK}{DH} = \frac{EK}{DL} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}x}{2x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ **تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب، سه برابر تعداد اضلاع آن است. تعداد قطرهایی که از دو رأس غیرمجاور این چندضلعی می‌گذرند، کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) از هر رأس یک nضلعی محدب، $(n-۳)$ قطر می‌گذرد.

۲) تعداد کل قطرهای یک nضلعی محدب $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

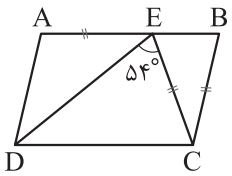
گام اول: تعداد اضلاع را n در نظر می‌گیریم، بنا به فرض، باید:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۳n \Rightarrow \frac{n-۳}{۲}=۳ \Rightarrow n=۹$$

گام دوم: فرض کنید A و B دو رأس غیرمجاور این ۹ضلعی باشند. از رأس A، $۹-۳=۶$ قطر و از رأس B هم $۹-۳=۶$ قطر می‌گذرد. چون قطر AB را هم در قطرهای گذرنده از A و هم در قطرهای گذرنده از B شمرده‌ایم، می‌توان گفت از دو رأس A و B در مجموع $۶+۶-۱=۱۱$ قطر می‌گذرد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۸ در شکل زیر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است و $BC = CE = AE$. حاصل $\hat{A} - \hat{B}$، کدام است؟

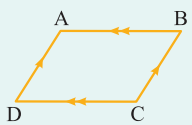


۱) ۱۲°
۲) ۱۸°
۳) ۲۴°
۴) ۲۷°

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint مثلث ADE متساوی‌الساقین و $\hat{A}$ مکمل $\hat{B}$ است.

درس Box اگر هر دو ضلع مقابل در یک چهارضلعی با هم موازی باشند، آن چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع نامیده می‌شود:

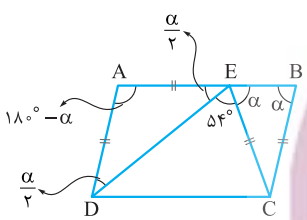


دوتا از خاصیت‌های مهم متوازی‌الاضلاع عبارت‌اند از:

الف) اضلاع روبه‌رو، با هم برابرند، یعنی در شکل بالا $AD = BC$ و $AB = CD$.

ب) زاویه‌های مجاور مکمل هم‌اند، یعنی در شکل بالا $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** از آن‌جا که در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو، با هم برابرند پس AD هم با BC، CE، AE و برابر است، پس مثلث ADE متساوی‌الساقین است:



گام دوم: فرض کنیم $\hat{B} = \alpha$، از آن‌جا که مثلث BCE متساوی‌الساقین است $B\hat{E}C = \alpha$ و به دلیل آن‌که در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور با هم مکمل‌اند، $\hat{A} = ۱۸۰^\circ - \alpha$.

گام سوم: از آن‌جا که در مثلث متساوی‌الساقین ADE داریم $\hat{A} = ۱۸۰^\circ - \alpha$، پس $A\hat{D}E = A\hat{E}D = \frac{\alpha}{۲}$.

گام چهارم: با توجه به شکل، داریم:

$$A\hat{E}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{۲} + ۵۴^\circ + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} = ۱۲۶^\circ \Rightarrow \alpha = ۸۴^\circ$$

در نهایت داریم:

$$\hat{A} - \hat{B} = (۱۸۰^\circ - \alpha) - \alpha = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha \xrightarrow{\alpha = ۸۴^\circ} \hat{A} - \hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۱۶۸^\circ = ۱۲^\circ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹ مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه، نصف مربع طول میانهٔ وارد بر وتر آن است. فاصلهٔ بین پای ارتفاع و پای میانهٔ وارد بر وتر این مثلث، چند برابر طول وتر آن است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

مشاوره مبحث مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ خاص (مثلث‌های قائم‌الزاویه با زاویه‌های ۴۵°، ۳۰° و ۱۵°) از مهم‌ترین مباحث فصل سوم هندسه (۱) است، سعی کنید مطمئن شوید که روی آن، تسلط کافی پیدا کرده‌اید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint یکی از زاویه‌های مثلث، ۱۵° است.

درس Box

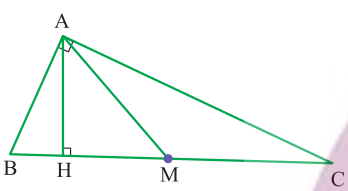
۱) در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است.

۲) اگر یکی از زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۵° باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر این مثلث، ربع طول وتر آن است و برعکس.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن ۶۰° است، طول ضلع روبه‌روی زاویهٔ ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: بنا به فرض سؤال داریم $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AM^۲$، از طرفی: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC$



پس: $\frac{۱}{۲}AM^۲=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow AM^۲=AH\times BC \quad (*)$

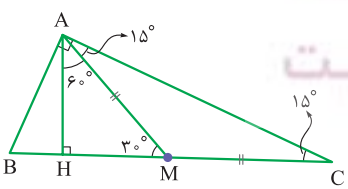
گام دوم: از آن‌جا که مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه، است داریم $AM=\frac{۱}{۲}BC$، پس با توجه به (*)، داریم:

$$(\frac{۱}{۲}BC)^۲=AH\times BC \Rightarrow AH=\frac{۱}{۴}BC$$

گام سوم: از این‌که طول ارتفاع وارد بر وتر، ربع طول وتر است، نتیجه می‌گیریم $\hat{C}=۱۵^\circ$، پس:

$$\overset{\Delta}{ACM}: AM=CM=\frac{۱}{۲}BC \Rightarrow M\hat{A}C=\hat{C}=۱۵^\circ$$

$\overset{\Delta}{ACM}$ زاویهٔ خارجی برای $A\hat{M}H=۱۵^\circ+۱۵^\circ=۳۰^\circ$:



$$\Rightarrow M\hat{A}H=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ$$

گام چهارم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM، داریم:

$$M\hat{A}H=۶۰^\circ \Rightarrow MH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AM \Rightarrow MH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\frac{۱}{۲}BC)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}BC$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۰ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین که طول قاعدهٔ کوچک و ساق آن برابر ۶ و اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ آن 60° است، وسط‌های اضلاع را به طور متوالی به یکدیگر وصل می‌کنیم. محیط چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) ۱۲

۲) $12\sqrt{2}$

۳) $12\sqrt{3}$

۴) ۲۴

مشاوره این سؤال با نگاه به تمرین‌های ۴ و ۷ صفحهٔ ۶۴ کتاب درسی هندسه (۱) و به صورت ترکیبی از ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه و شکل حاصل از وصل‌کردن وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی طراحی شده است.

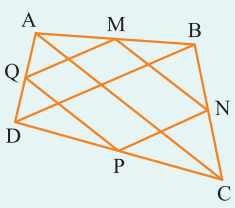
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ارتفاع‌های ذوزنقه را رسم کنید و به کمک آن طول قطرهای ذوزنقه را به دست آورید.

درس Box

۱) در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع روبه‌رو به زوایای 30° و 60° به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است.

۲) از وصل‌کردن وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی دلخواه در حالت کلی یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که اضلاع آن موازی قطرهای چهارضلعی و طول هر یک از اضلاع آن نصف طول یکی از قطرهای چهارضلعی است. بنابراین اندازهٔ محیط این متوازی‌الاضلاع برابر مجموع طول قطرهای چهارضلعی اولیه است.

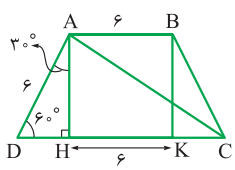


$$\begin{cases} MN = PQ = \frac{AC}{2} \\ MN \parallel PQ \parallel AC \end{cases}$$

$$\begin{cases} MQ = NP = \frac{BD}{2} \\ MQ \parallel NP \parallel BD \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ارتفاع‌های ذوزنقه را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH داریم:



$$\hat{D} = 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$D\hat{A}H = 30^\circ \Rightarrow DH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

گام دوم: چهارضلعی ABKH مستطیل است، پس $HK = AB = 6$. از طرفی دو مثلث ADH و BCK هم‌نهشت هستند، پس $CK = DH = 3$ و در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث AHC داریم:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 9^2 = 108 \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}$$

گام سوم: طبق مورد (۲) درس‌باکس، محیط چهارضلعی حاصل از وصل‌کردن وسط‌های اضلاع ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD برابر مجموع طول دو قطر آن یعنی برابر $12\sqrt{3}$ است.

توجه از آن جا که ذوزنقهٔ ABCD متساوی‌الساقین است، طول دو قطر آن با هم برابر است، یعنی $AC = BD$.

۳۱ چند عدد طبیعی دورقمی مانند n در رابطهٔ $۱۵^n - ۵^n \mid ۲۸$ صدق می‌کنند؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اگر عبارت سمت راست را به صورت $۵^n(۳^n - ۱)$ بنویسیم، ۵^n هیچ‌کدام از عامل‌های ۲۸ را ندارد. در نتیجه:

$$۲۸ \mid ۳^n - ۱$$

گام دوم: پس $۳^n - ۱^n$ بر $۳^۳ + ۱^۳$ بخش‌پذیر است:

$$\Rightarrow \frac{n}{۳} = ۲k \Rightarrow n = ۶k$$

گام سوم: حالا می‌خواهیم n دورقمی باشد:

$$۱۰ \le ۶k \le ۹۹ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۲ \le k \le ۱۶$$

تعداد: $۱۶ - ۲ + ۱ = ۱۵$

کنکور

اگر عدد $۱ - ۲^n$ بر عدد ۲۱۷ **بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دورقمی** n، کدام است؟ (سؤال ۱۵۱ کنکور ریاضی ۱۳۹۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۲ اگر n عددی طبیعی و k عددی صحیح باشد و دو رابطهٔ $۳ \mid ۵k-۲$ و $۹ \mid ۳۴k^۲+nk+۷$ برقرار باشند، باقی‌ماندهٔ n بر ۹ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) صفر ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: از $۳ \mid ۵k-۲$ دو تا رابطهٔ جدید می‌سازیم:

$$۳ \mid ۵k-۲ \xrightarrow{\text{به توان دو}} ۹ \mid ۲۵k^۲-۲۰k+۴$$
$$\downarrow \times ۳$$
$$۹ \mid ۱۵k-۶$$

گام دوم: از ترکیب خطی داریم:

$$\xrightarrow{+} ۹ \mid ۲۵k^۲-۵k-۲$$

خودمان هم می‌نویسیم: $۹ \mid ۹k^۲+۹$

و دوباره ترکیب خطی: $\xrightarrow{+} ۹ \mid ۳۴k^۲-۵k+۷$

گام سوم: پس به جای n در طرف راست -۵ قرار دارد: $n=-۵+۹t$

که باقی‌ماندهٔ آن بر ۹ می‌شود ۴.

کتاب درسی اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $۵ \mid ۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$

(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۴ صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۳ مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد چهاررقمی مانند x که در رابطهٔ $13 \mid 15x^2 + 2x - 1$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طرف راست را تجزیه کنیم: $13 \mid (3x+1)(5x-1)$

گام دوم: ۱۳ باید یکی از دو عامل را بشمارد:

$13 \mid 3x+1$ یا $13 \mid 5x-1$

پس داریم:

الف) $5x-1=13q$ یا ب) $3x+1=13k$

گام سوم: حالا باقی‌ماندهٔ x بر ۱۳ را به دست می‌آوریم:

الف) $5x = \overset{\times 13}{13q+1} = 13q' + 39 + 1 \xrightarrow[\text{حتماً به ۵ می‌خورد.}\ q']{\div 5} x = 13q'' + 8$

ب) $3x = 13k - 1 = 13k' + 13 - 1 \xrightarrow[\text{حتماً به ۳ می‌خورد.}\ k']{\div 3} x = 13k'' + 4$

(13 روی $13k$)

پس باقی‌ماندهٔ x بر ۱۳ برابر ۴ یا ۸ است.

گام چهارم: می‌دانیم باقی‌ماندهٔ ۱۰۰۱ بر ۱۳ صفر است، پس کم‌ترین مقدار x می‌شود $1005 = 1001 + 4$ که جمع ارقامش ۶ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۴ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n، عبارت $n^2 + n$ بر ۱۴ بخش‌پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: عبارت $n(n+1)$ ضرب دو عدد متوالی و همواره زوج است.

در نتیجه فقط یکی از عامل‌ها باید مضرب ۷ باشد.

گام دوم: اگر $n = 7k$ باشد از $k = 2$ تا $k = 14$ سیزده‌تا جواب دورقمی برای n داریم. اگر $n+1 = 7k$ باشد $n = 7k-1$ و همین kها به ما ۱۳تا جواب دورقمی دیگر می‌دهند.

گام سوم: پس روی هم ۲۶ جواب دورقمی برای n داریم.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۵ اگر $a=[۱۲,۴۰]$ باشد، حاصل $[(۳۰,۱۰۵),۱۲۰]$ کدام است؟

۱) a ۲) $۲a$ ۳) $a^۲$ ۴) $\frac{a}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ک.م.م را حساب کنیم:

$$a=[۱۲,۴۰]=۸\times۳\times۵=۱۲۰$$
$$\downarrow\ \ \downarrow$$
$$۴\times۳\ \ ۸\times۵$$

گام دوم: حالا داریم:

$$[(۳۰,۱۰۵),۱۲۰]=[(\underbrace{۳\times۲\times۵}_{۳\times۵},۵\times۷\times۳),۸\times۳\times۵]=۸\times۳\times۵=a$$

کتاب درسی

حاصل هر یک را به دست آورید: $(m\in\mathbb{Z})$ *(ریاضیات گسسته ـ تمرین ۱۶ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)*

الف) $([m^۲,m],m^۵)$

ب) $(۲m,۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱,۳m+۲)$

ت) $[m^۷,(m^۲,m^۳)]$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۶ اگر n کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی باشد که در رابطهٔ $[7n-4,5n+3]=35n^2+n-12$ صدق نمی‌کند، باقی‌ماندهٔ 2^n+3^n بر عدد ۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $35n^2+n-12$ برابر حاصل‌ضرب دو عدد $5n+3$ و $7n-4$ است. سؤال گفته رابطه برقرار نیست، پس ک.م.م برابر حاصل‌ضرب نشده و این یعنی ب.م.م دو عدد، یک نبوده است:

$$(5n+3,7n-4)\neq 1$$

گام دوم: ب.م.م را حساب کنیم:

$$d\mid 5n+3 \xrightarrow{\times 7} d\mid 35n+21$$
$$d\mid 7n-4 \xrightarrow{\times 5} d\mid 35n-20$$
$$d\mid 41 \rightarrow d=1 \text{ یا } 41 \xrightarrow{d\neq 1} d=41$$

گام سوم: پس بریم دنبال ب.م.م ۴۱:

$$41\mid 5n+3 \Rightarrow 5n+3=41q \Rightarrow 5n=\underbrace{41q-3}_{3\times 41}=41q'+123-3$$

$$\xrightarrow[\text{q' باید به ۵ بخورد.}]{\div 5} n=41q''+24$$

پس باقی‌ماندهٔ n بر ۴۱ باید ۲۴ باشد و کم‌ترین عدد سه‌رقمی می‌شود:

$$41\times 2+24=106$$

گام چهارم: باقی‌ماندهٔ $2^{106}+3^{106}$ بر ۷ را می‌خواهیم:

$$2^{106}+3^{106}\overset{7}{\equiv}\underbrace{(2^3)}_{1}^{35}\times 2+\underbrace{(3^3)}_{-1}^{35}\times 3\overset{7}{\equiv}-1\overset{7}{\equiv}6$$

کنکور

در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $d=(3n^2-2n+6,3n+5)$ و $d\neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

(سؤال ۱۵۰ کنکور ریاضی ۱۳۹۹ (خارج از کشور))

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ **اگر a مضرب ۵ نباشد، در تقسیم a^3 بر ۵، باقی‌مانده چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طبق الگوریتم تقسیم عدد صحیح a که مضرب ۵ نیست به یکی از صورت‌های $5q+1$ و $5q+2$ و $5q+3$ و $5q+4$ است.

گام دوم: پس داریم:

$$a \overset{5}{\equiv} 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4$$

$$a^3 \overset{5}{\equiv} 1 \text{ یا } 8 \text{ یا } 27 \text{ یا } 64 \overset{5}{\equiv} 1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ یا } 4 \xrightarrow{\text{به توان ۳}}$$

پس باقی‌ماندهٔ a^3 بر ۵ چهار مقدار متمایز دارد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ اگر $7^{1406}+a$ مضرب ۱۹ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای باقی‌ماندهٔ a در تقسیم بر عدد ۵۷ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۷۳ ۳) ۸۱ ۴) ۹۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دنبال همنهشتی مناسبی برای 7^k در پیمانهٔ ۱۹ می‌رویم:

$$7^2 \overset{19}{\equiv} 11 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \overset{19}{\equiv} 77 \overset{19}{\equiv} 1$$

پس $7^3 \overset{19}{\equiv} 1$

گام دوم: حالا به توان $[\frac{1406}{3}] = 468$ می‌رسانیم:

$$7^{1404} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{1406} \overset{19}{\equiv} 49 \overset{19}{\equiv} 11 \xrightarrow{+a} 7^{1406}+a \overset{19}{\equiv} 11+a \overset{19}{\equiv} 0$$

پس $a \overset{19}{\equiv} 8$

گام سوم: فهمیدیم باقی‌ماندهٔ a بر ۱۹، ۸ است:

$$a = 19q + 8$$

ما دنبال باقی‌ماندهٔ a بر ۵۷ هستیم، پس باید $q = 3q' + r$ را بررسی کنیم:

الف) $q = 3q' + 0 \Rightarrow a = 57q' + 8$

ب) $q = 3q' + 1 \Rightarrow a = 57q' + 19 + 8 = 57q' + 27$

ج) $q = 3q' + 2 \Rightarrow a = 57q' + 38 + 8 = 57q' + 46$

جمع باقی‌مانده‌های ممکن a بر ۵۷ می‌شود:

$$8 + 27 + 46 = 81$$

یه‌جور دیگه

یواشکی از بیرون کتاب درسی، قضیهٔ فرما می‌گوید:

$$p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

$$7^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow[7^8]{\text{به توان}} 7^{1404} \overset{19}{\equiv} 1$$

و ادامهٔ ماجرا مثل راه اول است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۹ عدد $\overline{1ab75a}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است. بیشترین و کم‌ترین مقدار ab چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۴۹ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عدد به ۹ می‌خورد:

$$\xrightarrow{\text{جمع ارقام}} 1+a+b+7+5+a \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 2a+b \overset{9}{\equiv} -4 \Rightarrow 2a+b = 5,14,23$$

گام دوم: عدد به ۱۱ می‌خورد:

$$\xrightarrow[\text{کم و جمع}]{\text{از سمت راست}} +a-5+7-b+a-1 \overset{11}{\equiv} 0$$

$$2a-b \overset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow 2a-b = -1,10$$

گام سوم: دوتا دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 2a+b=5 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a+b=14 \\ 2a-b=10 \end{cases}$$

حل کنیم:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} , \quad \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ab)_{max} - (ab)_{min} = 6\times 2 - 1\times 3 = 9$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت


دانلود رایگان تمام
آزمون‌های آزمایشی
در کانال تلگرام ما :
آزمون‌های آزمایشی
t.me/Azmoonha_Azmayeshi
دسترسی سریع
رایگان و دائمی
معتبر و جامع
ویژه کنکور سراسری
آزمون مخصوص تمام پایه‌ها و تمام رشته‌ها
موفقیت + برنامه تلاش
گزینه دو
موسسه آموزشی فرهنگی
سنجش
زیبستاز
کانون فرهنگی آموزش قلم چی
گاج
آزمودهای سراسری
t.me/Azmoonha_Azmayeshi

۴۰ **اگر A مجموع مجذورات ۱۰ عدد اول متمایز باشد. باقی‌ماندهٔ A بر ۱۲ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: می‌دانیم اگر $p > 3$ باشد، $p = 6k \pm 1$ و $p^2 = 24k + 1$ است. در نتیجه مجموع مجذورات اعداد اول را در حالت‌های زیر در نظر می‌گیریم:

الف) ۲ و ۳ و هشت عدد اول دیگر که بیشتر از ۳ هستند.

ب) ۲ و نُه‌تا عدد اول بیشتر از ۳

ج) ۳ و نُه‌تا عدد اول بیشتر از ۳

د) کلاً ده عدد اول بیشتر از ۳

گام دوم: چون $۲^۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۴$ و $۳^۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۹$ و $p > 3 \Rightarrow p^۲ \overset{۱۲}{\equiv} ۱$ باقی‌ماندهٔ مجموع‌ها بر ۱۲ برابر است با:

الف) $۴ + ۹ + ۸ \times ۱ \overset{۱۲}{\equiv} ۹$

ب) $۴ + ۹ \times ۱ \overset{۱۲}{\equiv} ۱$

ج) $۹ + ۹ \times ۱ \overset{۱۲}{\equiv} ۶$

د) $۱۰ \times ۱ \overset{۱۲}{\equiv} ۱۰$

پس باقی‌ماندهٔ ۷ ایجاد نشد!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۱ متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند، چه تعداد از موارد زیر در مورد حرکت این متحرک الزاماً درست است؟

الف) شتاب متوسط این متحرک در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

ب) سرعت متوسط این متحرک در تمام بازه‌های زمانی یکسان است.

پ) نمودار مکان ـ زمان این متحرک قسمتی از یک سهمی است.

ت) جابه‌جایی این متحرک متناسب با مربع زمان جابه‌جایی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) شتاب متوسط ($\vec{a}_{av}$): در هر بازهٔ زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازهٔ زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_{av}$: شتاب متوسط (m/s^2)

$\vec{v}_1$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 (m/s)

$\vec{v}_2$: سرعت متحرک در لحظهٔ t_2 (m/s)

شتاب متوسط، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است، زیرا Δt همواره مثبت است.

۲) معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور x:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t (m)

x_0: مکان اولیه یا مبدأ حرکت، یعنی مکان متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m)

v_0: سرعت اولیه یا سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ (m/s)

a: شتاب حرکت (m/s^2)

t: زمان (s)

پاسخ خیلی تشریحی

تک‌تک عبارات را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛ در حرکتی که شتاب لحظه‌ای آن همواره ثابت و برابر a است، تغییرات سرعت در هر بازهٔ زمانی Δt برابر $\Delta v = a\Delta t$ می‌باشد؛ در نتیجه شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه، همواره برابر با همان مقدار ثابت شتاب لحظه‌ای $(a_{av} = a)$ است.

ب) نادرست؛ حرکت شتاب ثابت است، یعنی سرعت با آهنگ ثابتی در حال تغییر است، پس سرعت متوسط در بازه‌های زمانی مختلف، متفاوت است.

پ) درست؛ وقتی معادلهٔ مکان ـ زمان، یک معادلهٔ درجه‌دوم است، پس بدیهی است نمودار آن نیز سهمی باشد.

ت) نادرست؛ تنها در شرایطی جابه‌جایی متناسب با مربع زمان $(\Delta x \propto (\Delta t)^2)$ است که سرعت اولیه صفر باشد $(v_0 = 0)$. در حالت کلی که ممکن است $v_0 \neq 0$ باشد، به دلیل حضور جملهٔ درجه‌اول $(v_0\Delta t)$، تناسب مستقیم با توان دوم برقرار نیست.

بنابراین فقط عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند و گزینهٔ (۲) صحیح می‌باشد.

۴۲ **کدام معادلهٔ حرکت مربوط به متحرکی است که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند و از لحظهٔ $t = ۰$ به بعد نوع حرکتش ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است؟**

۱) $x = -۵t^۲ - ۱۲t + ۲۰$

۲) $x = ۲t^۲ - ۸t - ۳۰$

۳) $x = ۲t^۳ - ۴t^۲ - ۱۲t$

۴) $x = -۱۲t + ۶$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به درس‌باکس سؤال قبل، باید دنبال معادلهٔ درجه‌دوم باشید (حذف گزینهٔ (۳) و (۴)).

گام دوم: می‌دانیم معیار کندشونده‌بودن $a < ۰$ و معیار تندشونده‌بودن $av > ۰$ است. اما باید دنبال معادله‌ای با مقادیری از a و v باشید که در $t = ۰\,s$، $av < ۰$ باشد و سپس بعد از $t = ۰\,s$ متوقف شود $(v = ۰)$ و از آن به بعد $av > ۰$ شود.

با بررسی گزینهٔ (۲) داریم:

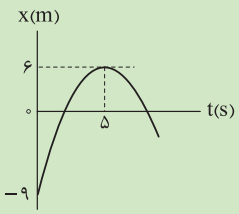
$$\left.\begin{array}{l} x = ۲t^۲ - ۸t - ۳۰ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = ۴\ m/s^۲ \\ v_۰ = -۸\ m/s \\ x_۰ = -۳۰\ m \end{cases}$$

$$v = ۴t - ۸ \xrightarrow{v=۰} t = ۲\,s$$

پس حرکت متحرک در بازهٔ زمانی $(۰, ۲\,s)$ کندشونده است و در بازهٔ زمانی $t > ۲\,s$ تندشونده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۳ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل زیر است. شتاب این متحرک در SI کدام است؟



۱) $(۱/۲\ m/s^۲)\vec{i}$

۲) $(-۱/۲\ m/s^۲)\vec{i}$

۳) $(۰/۲۴\ m/s^۲)\vec{i}$

۴) $(-۰/۲۴\ m/s^۲)\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه در حرکت با شتاب ثابت روی محور x:

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt$$

Δx: جابه‌جایی (m)

a: شتاب $(m/s^۲)$

t: زمان (s)

v: سرعت در لحظهٔ t (m/s)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار، برای بازهٔ زمانی صفر تا ۵ s، کافی است تا اطلاعات مسئله را در رابطهٔ درس‌باکس جای‌گذاری کنید:

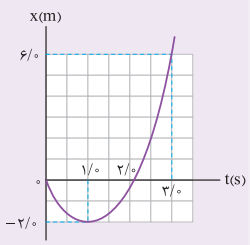
$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt \xrightarrow[v=۰]{\Delta x=۶-(-۹)=۱۵\ m,\ t=۵s} ۱۵ = -\frac{۱}{۲}a\times ۵^۲ + ۰(۵)$$

$$\Rightarrow a = -\frac{۳۰}{۲۵} = -\frac{۶}{۵} = -۱/۲\ m/s^۲ \Rightarrow \vec{a}_{av} = (-۱/۲\ m/s^۲)\vec{i}$$

کتاب درسی

شکل زیر نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x با شتاب ثابت در حرکت است.

(فیزیک (۳) ـ سؤال ۱۹ پرسش‌ها و مسئله‌های فصل اکتاب درسی)



الف) سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۳/۰ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟

ب) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را بنویسید.

پ) سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = ۳/۰\ s$ پیدا کنید.

ت) نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنید.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۴ متحرکی با شتاب ثابت و در یک جهت روی محور x در حال حرکت است. در مکان $x_1 = ۱۰\ m$ اندازهٔ سرعت متحرک $۱۸\ km/h$ و در مکان $x_2 = ۲۰\ m$ اندازهٔ سرعت متحرک $۳۶\ km/h$ است. اندازهٔ سرعت متحرک در مکان $x_3 = ۳۰\ m$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۵}$ ۳) $۵\sqrt{۷}$ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: طبق معادلهٔ مستقل از زمان، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x_1 = ۱۰\ m, v_1 = ۱۸\ km/h = \frac{۱۸}{۳/۶}\ m/s = ۵\ m/s \\ x_2 = ۲۰\ m, v_2 = ۳۶\ km/h = \frac{۳۶}{۳/۶}\ m/s = ۱۰\ m/s \end{cases}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = ۲a(x_2 - x_1) \Rightarrow ۱۰^2 - ۵^2 = ۲a(۲۰-۱۰) \Rightarrow a = ۳/۷۵\ m/s^2$$

گام دوم: از طرفی برای جابه‌جایی از x_2 تا x_3 می‌توانیم بنویسیم:

$$v_3^2 - v_2^2 = ۲a(x_3 - x_2) \xrightarrow[a=۳/۷۵\ m/s^2, x_3=۳۰\ m]{v_2=۱۰\ m/s, x_2=۲۰\ m} v_3^2 - ۱۰^2 = ۲(۳/۷۵)(۳۰-۲۰)$$

$$\Rightarrow v_3^2 = ۱۷۵ \Rightarrow |v_3| = \sqrt{۱۷۵} = ۵\sqrt{۷}\ m/s$$

کتاب درسی

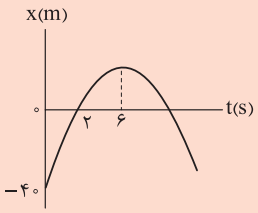
متحرکی در امتداد محور x و با شتاب ثابت در حرکت است. در مکان $x = +۱۰\ m$ سرعت متحرک $+۴\ m/s$ و در مکان $x = +۱۹\ m$ سرعت متحرک $+۱۸\ km/h$ است. *(فیزیک (۳) ـ سؤال ۲۰ پرسش‌ها و مسئله‌های فصل ۱ کتاب درسی)*

الف) شتاب حرکت آن چه‌قدر است؟

ب) پس از چه مدتی سرعت متحرک از $+۴\ m/s$ به سرعت $+۱۸\ km/h$ می‌رسد؟

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در مدت‌زمانی که بردار مکان این متحرک در جهت محور x است، تندی متوسط چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۶/۴
۲) ۸
۳) ۱۰/۴
۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار مکان ـ زمان، درمی‌یابیم که مکان متحرک در مبدأ زمان در $x_۰ = -۴۰\ m$ و متحرک در $t = ۲\ s$ از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور کرده است. از طرفی در $t = ۶\ s$ متحرک تغییر جهت داده است؛ بنابراین داریم:

$$\text{حرکت با شتاب ثابت} \Rightarrow \begin{cases} v = at + v_۰ \xrightarrow[v=۰]{t=۶\,s} ۰ = a(۶) + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۶a \quad (I) \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow{(I)} x = \frac{۱}{۲}at^۲ - ۶at + x_۰ \xrightarrow{x_۰=-۴۰\,m} x = \frac{۱}{۲}at^۲ - ۶at - ۴۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x=۰]{t=۲\,s} ۰ = \frac{۱}{۲}a(۲^۲) - ۶a(۲) - ۴۰ \Rightarrow ۱۰a = -۴۰ \Rightarrow a = -۴\ m/s^۲ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} v_۰ = -۶(-۴) = ۲۴\ m/s$$

گام دوم: حالا با داشتن a، $v_۰$ و $x_۰$ معادلهٔ مکان ـ زمان را می‌نویسیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow[x_۰=-۴۰\,m]{a=-۴\,m/s^۲,\ v_۰=۲۴\,m/s} x = -۲t^۲ + ۲۴t - ۴۰$$

$$\Rightarrow x = -۲(t^۲ - ۱۲t + ۲۰) = -۲(t-۲)(t-۱۰)$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ x ـ t لحظه‌های $t = ۲\ s$ و $t = ۱۰\ s$ هستند.

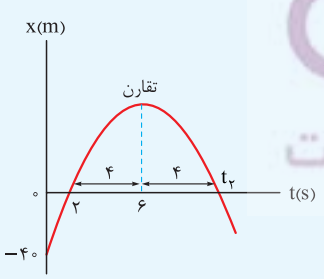
گام سوم: در نتیجه، تندی متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲\ s$ تا $t_۲ = ۱۰\ s$ برابر است با:

$$x = -۲t^۲ + ۲۴t - ۴۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۲\ s \Rightarrow x_۱ = ۰ \\ t_s = ۶\ s \Rightarrow x_s = -۲(۶^۲) + ۲۴(۶) - ۴۰ = ۳۲\ m \\ t_۲ = ۱۰\ s \Rightarrow x_۲ = ۰ \end{cases}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{|۳۲-۰| + |۰-۳۲|}{۱۰-۲} = \frac{۶۴}{۸} = ۸\ m/s$$

یه جور دیگه

با توجه به نمودار x ـ t، معادلهٔ درجه‌دوم را به دست می‌آوریم:



$$t_۲ = ۶ + ۴ = ۱۰\ s$$

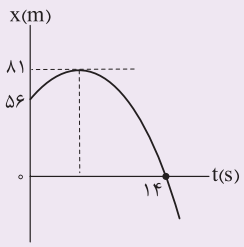
$$x = A(t-۲)(t-۱۰) \xrightarrow{x_۰=-۴۰\,m} -۴۰ = A(-۲)(-۱۰) \Rightarrow A = -۲$$

$$\Rightarrow x = -۲(t-۲)(t-۱۰) \Rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۰ \\ x_۶ = -۲(۴)(-۴) = ۳۲\ m \\ x_{۱۰} = ۰ \end{cases} \Rightarrow s_{av(۲-۱۰)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۳۲+۳۲}{۸} = ۸\ m/s$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

کنکور

نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل است. تندی متوسط در بازهٔ زمانی که بردار مکان متحرک در جهت محور x است، چند متر بر ثانیه است؟ (سؤال ۴۸ کنکور تجربی ۱۴۰۵)



۱) ۵

۲) ۱۰

۳) $\frac{۵۳}{۷}$

۴) $\frac{۲۳}{۷}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۶ متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی این متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 12\ s$ برابر ۶۰ متر است. اگر $\frac{2}{3}$ این جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول و بقیهٔ آن در ۸ ثانیهٔ بعدی انجام شود، بزرگی شتاب این متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به این‌که متحرک با شتاب ثابت حرکت می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \begin{cases} \text{اول جابه‌جایی } \frac{2}{3}: \Delta x_1 = \frac{2}{3}\times 60 = 40\ m\ ,\ t_1 = 4\ s \\ \text{کل جابه‌جایی}: \Delta x_2 = 60\ m\ ,\ t_2 = 12\ s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40 = \frac{1}{2}a(4^2) + v_0(4) = 8a + 4v_0 \\ 60 = \frac{1}{2}a(12^2) + v_0(12) = 72a + 12v_0 \xrightarrow{\div 3} 20 = 24a + 4v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a + 4v_0 = 40 \\ 24a + 4v_0 = 20 \end{cases} \xrightarrow{(-)} -16a = 20 \Rightarrow a = -\frac{5}{4}\ m/s^2 \Rightarrow |a| = \frac{5}{4}\ m/s^2$$

یه‌جور دیگه با توجه به این‌که حرکت با شتاب ثابت است، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی با سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ وسط بازه برابر است؛ بنابراین اگر t_1 را صفر فرض کنیم، داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_{av(0-4)} = \frac{40}{4} = 10\ m/s \\ v_{av(0-12)} = \frac{60}{12} = 5\ m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2\,s} = 10\ m/s \\ v_{6\,s} = 5\ m/s \end{cases}$$

حالا شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{6\,s} - v_{2\,s}}{6-2} = \frac{5-10}{4} = -\frac{5}{4}\ m/s^2 \Rightarrow |a| = \frac{5}{4}\ m/s^2$$

کنکور متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 16\ (s)$ برابر ۴۰۰ متر است. اگر نیمی از این جابه‌جایی در ۴ ثانیهٔ اول و نیم دیگر آن در ۱۲ ثانیهٔ بعد از آن انجام شود، بزرگی شتاب حرکت در SI کدام است؟ *(سؤال ۱۸۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱)*

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{25}{6}$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۷ متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a} = (-۲/۵\ m/s^۲)\vec{i}$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر در $t = ۰$، سرعت و مکان این متحرک به ترتیب $(۴\ m/s)\vec{i}$ و $(۱۰\ m)\vec{i}$ باشد، نوع حرکت این متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲\ s$ تا $t_۲ = ۳\ s$ کدام است؟

۱) تندشونده

۲) کندشونده

۳) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

۴) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

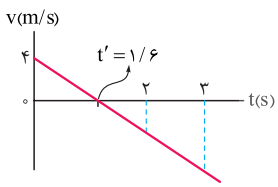
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰ = ۴\ m/s]{a = -۲/۵\ m/s^۲} v = -۲/۵\,t + ۴$$

گام دوم: نمودار v ـ t حرکت را رسم می‌کنیم:



$$v = ۰ \Rightarrow -۲/۵\,t' + ۴ = ۰ \Rightarrow t' = \frac{۴}{۲/۵} = ۱/۶\ s$$

گام سوم: نوع حرکت در بازهٔ $t_۱ = ۲\ s$ تا $t_۲ = ۳\ s$ با توجه به این‌که نمودار v ـ t در این بازهٔ زمانی همواره در حال دورشدن از محور t است، پیوسته تندشونده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۸ متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند و معادلهٔ حرکت آن در SI به صورت $x = ۲t^۲ - ۸t + ۱۴$ است. مسافت طی‌شده توسط این متحرک در ۴ ثانیهٔ دوم چند متر بیشتر از مسافت طی‌شده توسط آن در ۴ ثانیهٔ اول حرکتش است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

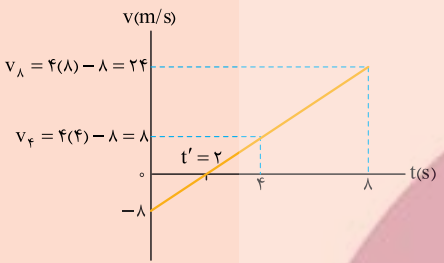
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = ۲t^۲ - ۸t + ۱۴ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲}a = ۲ \Rightarrow a = ۴\ m/s^۲ \\ v_۰ = -۸\ m/s \end{cases}$$

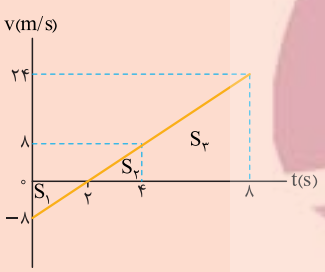
$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰=-۸\ m/s]{a=۴\ m/s^۲} v = ۴t - ۸$$

گام دوم: نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



$$t' = -\frac{v_۰}{a} = \frac{(-۸)}{۴} = ۲\ s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ اول و ۴ ثانیهٔ دوم حرکت و نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:



$$S_۱ = \frac{۸ \times ۲}{۲} = ۸$$

$$S_۲ = \frac{۸ \times ۲}{۲} = ۸$$

$$S_۳ = (\frac{۸ + ۲۴}{۲}) \times ۴ = ۶۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_{(۰-۴)} = S_۱ + S_۲ = ۸ + ۸ = ۱۶\ m \\ \ell_{(۴-۸)} = S_۳ = ۶۴\ m \end{cases} \Rightarrow \ell_{(۴-۸)} - \ell_{(۰-۴)} = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸\ m$$

ایران توشه

کنکور معادلهٔ حرکت جسمی در SI به صورت $x = t^۲ - ۱۲t + ۲۰$ است. مسافتی که متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه طی می‌کند، چند متر است؟ *(سؤال ۵۰ کنکور تجربی ۱۴۰۴ ـ نوبت اول)*

۱) ۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۵۲

۴۹ متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a}=(۴\ m/s^۲)\vec{i}$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ پنجم حرکتش ۸/۵ متر کم‌تر از جابه‌جایی آن در دو ثانیهٔ دوم حرکتش باشد، سرعت اولیهٔ این متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱۰۱}{۶}$ ۴) $\frac{۶۷}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ‌خیلی‌تشریحی

گام اول: با توجه به این‌که حرکت با شتاب ثابت است، داریم:

جابه‌جایی دو ثانیهٔ دوم: $\Delta x_{(۲-۴)}=v_{av_{(۲-۴)}}\times\Delta t_{(۲-۴)}=v_{۳\,s}\times۲=۲v_{۳\,s}$ (I)

جابه‌جایی ثانیهٔ پنجم: $\Delta x_{(۴-۵)}=v_{av_{(۴-۵)}}\times\Delta t_{(۴-۵)}=v_{۴/۵\,s}\times۱=v_{۴/۵\,s}$ (II)

گام دوم: با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\Delta x_{(۴-۵)}-\Delta x_{(۲-۴)}=-۸/۵\xrightarrow{(I),(II)}v_{۴/۵\,s}-۲v_{۳\,s}=-۸/۵\quad(III)$$

$$v=at+v_۰\xrightarrow{a=۴\ m/s^۲}v=۴t+v_۰\xrightarrow{(III)}(۴(۴/۵)+v_۰)-۲(۴(۳)+v_۰)=-۸/۵$$

$$\Rightarrow ۱۸+v_۰-۲۴-۲v_۰=-۸/۵\Rightarrow v_۰=۲/۵=\frac{۵}{۲}\ m/s$$

یه‌جور دیگه

در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی در ثانیهٔ nاُم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_n=(n-۰/۵)a+v_۰=(n-۰/۵)۴+v_۰\quad(I)$$

بنابراین داریم:

جابه‌جایی در دو ثانیهٔ دوم: $\Delta x_{(۲-۴)}:\Delta x_{(۲-۳)}+\Delta x_{(۳-۴)}=\Delta x_۳+\Delta x_۴$

جابه‌جایی در ثانیهٔ پنجم: $\Delta x_۵$

$$\Rightarrow \Delta x_۵-(\Delta x_۳+\Delta x_۴)=-۸/۵\xrightarrow{(I)}((۵-۰/۵)۴+v_۰)-((۳-۰/۵)۴+v_۰+(۴-۰/۵)۴+v_۰)$$

$$=۱۸+v_۰-۱۰-v_۰-۱۴-v_۰=-۶-v_۰=-۸/۵\Rightarrow v_۰=\frac{۵}{۲}\ m/s$$

کنکور

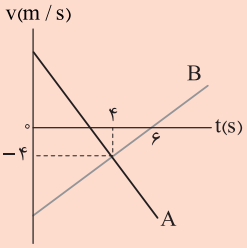
متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a}=(۴\ m/s^۲)\vec{i}$ در جهت محور x، در حرکت است. اگر مسافتی که این متحرک در فاصلهٔ زمانی $t_۱=۰\ s$ تا $t_۲=۲\ s$ طی می‌کند، ۴ متر بیشتر از مسافتی باشد که در ثانیهٔ سوم طی می‌کند، سرعت اولیهٔ آن چند متر بر ثانیه است؟ *(سؤال ۱۶۲ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)*

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۰ نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. اگر در لحظهٔ $t = ۰$ متحرک A از مبدأ محور و متحرک B از مکان $\vec{x}_{۰B} = (۳۰\,m)\vec{i}$ عبور کند و بزرگی شتاب متحرک A، ۲ برابر بزرگی شتاب متحرک B باشد، در لحظه‌ای که سرعت آن‌ها برابر است، فاصلهٔ آن‌ها از هم چند متر است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۲
۳) ۷۸
۴) ۸۲



پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک B را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان متحرک B داریم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[t_۲=۶\,s,\,v_۲=۰]{t_۱=۴\,s,\,v_۱=-۴\,m/s} \begin{cases} -۴ = a_B(۴) + v_۰ \\ ۰ = a_B(۶) + v_۰ \end{cases} \Rightarrow a_B = ۲\,m/s^۲,\ v_{۰B} = -۱۲\,m/s$$

گام دوم: شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک A را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار v ـ t متحرک A، درمی‌یابیم شتاب متحرک A (شیب نمودار) منفی است. از طرفی با توجه به این‌که اندازهٔ شتاب متحرک A دوبرابر اندازهٔ شتاب متحرک B است، می‌توانیم بنویسیم:

$$a_A = -۲a_B = -۲(۲) = -۴\,m/s^۲$$

$$v = at + v_۰ = -۴t + v_۰ \xrightarrow[v=-۴\,m/s]{t=۴\,s} -۴ = -۴(۴) + v_{۰A} \Rightarrow v_{۰A} = ۱۲\,m/s$$

گام سوم: معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = -۲t^۲ + ۱۲t \\ x_B = t^۲ - ۱۲t + ۳۰ \end{cases}$$

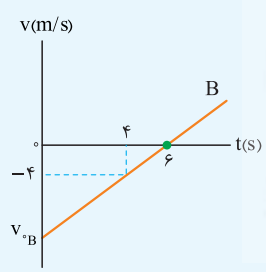
گام چهارم: در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک با هم برابر می‌شود (لحظه‌ای که نمودارهای v ـ t دو متحرک یکدیگر را قطع می‌کنند (یعنی $t = ۴\,s$)، فاصلهٔ دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$t = ۴\,s \begin{cases} x_A = -۲(۴)^۲ + ۱۲(۴) = ۱۶\,m \\ x_B = ۴^۲ - ۱۲(۴) + ۳۰ = -۲\,m \end{cases}$$

$$d = |x_A - x_B| = |۱۶ - (-۲)| = ۱۸\,m$$

یه‌جور دیگه

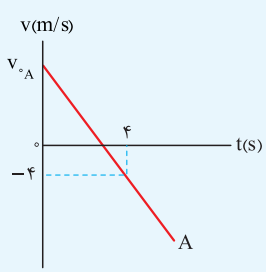
با توجه به نمودار v ـ t متحرک B، داریم:



$$a_B = \text{شیب} = \frac{۰-(-۴)}{۶-۴} = \frac{۴}{۲} = ۲\,m/s^۲$$

$$۲ = \frac{-۴ - v_{۰B}}{۴ - ۰} \Rightarrow v_{۰B} = -۱۲\,m/s$$

از طرفی برای متحرک A داریم:

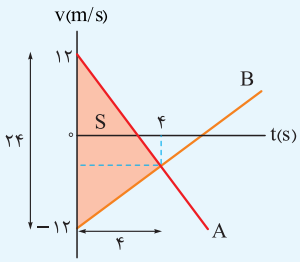


$$\text{شیب} = a_A = -۲a_B = -۴\,m/s^۲$$

$$-۴ = \frac{-۴ - v_{۰A}}{۴ - ۰} \Rightarrow v_{۰A} = ۱۲\,m/s$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

حالا تغییر فاصلهٔ دو متحرک را از صفر تا $4\ s$ حساب می‌کنیم:



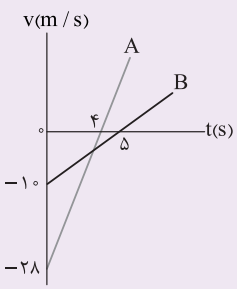
$$S = \frac{۲۴ \times ۴}{۲} = ۴۸$$

بنابراین در بازهٔ زمانی صفر تا $4\ s$، جابه‌جایی متحرک A، ۴۸ متر بیشتر از متحرک B است و با توجه به این‌که در $t = ۰$ متحرک A، ۳۰ متر عقب‌تر است، در $t = 4\ s$ فاصلهٔ دو متحرک از هم برابر با $d = ۴۸ - ۳۰ = ۱۸\ m$ می‌شود.

کنکور

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی یک خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۰\ s$ متحرک B از مبدأ محور و متحرک A از مکان $\vec{x}_۰ = (+۵۰\ m)\vec{i}$ عبور کنند، در لحظهٔ $t = ۲\ s$، فاصلهٔ دو متحرک از هم چند متر است؟

(سؤال ۴۹ کنکور تجربی ۱۴۰۵)



۱) ۷

۲) ۸

۳) ۲۳

۴) ۲۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ دو خودروی A و B روی محور x حرکت می‌کنند و سرعت هر دو در SI، $\vec{v} = (10\ m/s)\vec{i}$ است. در لحظهٔ $t = 0$ خودروی A و $2/5\ s$ بعد از خودروی B از مبدأ محور عبور می‌کند. اگر در لحظهٔ عبور خودروی B از مبدأ محور، خودروی A با شتابی به بزرگی $0/5\ m/s^2$ سرعت خود را کاهش دهد، در چه مکانی خودروی B به خودروی A می‌رسد؟

۱) ۵۰ ۲) ۷۷/۵
۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۲/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در لحظهٔ $t = 2/5\ s$، مکان متحرک A را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که متحرک A در مدت $2/5\ s$ با سرعت ثابت $10\ m/s$ حرکت می‌کند، داریم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[x_{0A}=0]{v_A=10\ m/s} x_A = 10(2/5) + 0 = 25\ m$$

گام دوم: از لحظهٔ $t = 2/5\ s$ به بعد، معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را به دست می‌آوریم:

متحرک A با شتاب ثابت $0/5\ m/s^2$ کند می‌شود $(a_A = -0/5\ m/s^2)$: $x_A = \frac{1}{2}a_A(t-2/5)^2 + v_{0A}(t-2/5) + x_{0A}$

$$\Rightarrow x_A = -\frac{1}{4}(t-2/5)^2 + 10(t-2/5) + 25$$

متحرک B با سرعت ثابت $10\ m/s$ حرکت می‌کند: $x_B = v_B(t-2/5) + \underbrace{x_{0B}}_{0} \Rightarrow x_B = 10(t-2/5)$

گام سوم: لحظه و مکان به هم رسیدن دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow -\frac{1}{4}(t-2/5)^2 + 10(t-2/5) + 25 = 10(t-2/5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(t-2/5)^2 = 25 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \frac{1}{2}(t-2/5) = 5 \Rightarrow t = 12/5\ s$$

$$x_A = x_B = 10(t-2/5) = 10(12/5 - 2/5) = 100\ m$$

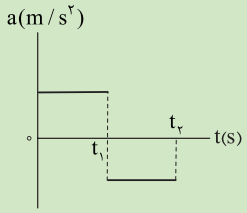
کنکور

در یک مسیر مستقیم، خودروی A با تندی ثابت $72\ km/h$ در حرکت است و به فاصلهٔ ۲۸ متر پشت سر آن خودروی B نیز با همان تندی حرکت می‌کند. در یک لحظه خودروی A با شتاب ثابت $4\ m/s^2$ سرعت خود را کاهش می‌دهد و ۲ ثانیه بعد، رانندهٔ خودروی B با شتاب ثابت $4\ m/s^2$ ترمز می‌کند. تندی خودروی B موقع رسیدن به خودروی A چند متر بر ثانیه است؟ *(سؤال ۴۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۵)*

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۲ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، نوع حرکت این متحرک کدام مورد نمی‌تواند باشد؟



۱) فقط تندشونده

۲) فقط کندشونده

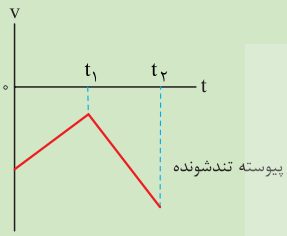
۳) ابتدا کندشونده سپس تندشونده

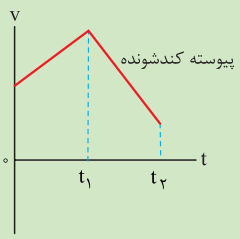
۴) ابتدا تندشونده سپس کندشونده

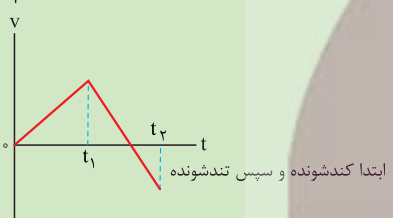
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار شتاب ـ زمان متحرک و رسم نمودار v ـ t در حالت‌های مختلف، درمی‌یابیم در بازهٔ t_1 تا t_2، نمودار سرعت ـ زمان می‌تواند، پیوسته تندشونده، پیوسته کندشونده و یا ابتدا کندشونده و سپس تندشونده باشد و هیچ‌وقت نمی‌تواند ابتدا تندشونده و سپس کندشونده باشد:





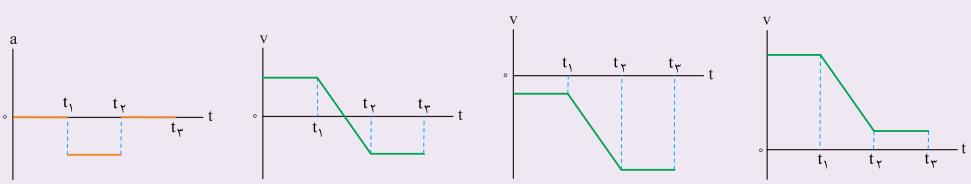


نکته در حرکت با شتاب ثابت، هیچ‌گاه امکان ندارد متحرک ابتدا تندشونده و سپس کندشونده حرکت کند.

یه‌جور دیگه با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 شتاب ثابت است، طبق نکته، امکان ندارد متحرک ابتدا تندشونده و سپس کندشونده حرکت کند.

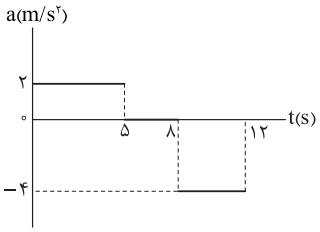
کتاب درسی نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. توضیح دهید چگونه هر یک از نمودارهای سرعت ـ زمان شکل‌های (الف)، (ب) و (پ) می‌توانند متناظر با این نمودار شتاب ـ زمان باشند.

(برگرفته از پرسش ۱ ـ ۷ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)



(الف) (ب) (پ)

۵۳ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان $\vec{v}_{\circ} = (-۶\ m/s)\vec{i}$ باشد، در بازهٔ زمانی که متحرک به صورت تندشونده در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک نمودار a ـ t، نمودار v ـ t را رسم می‌کنیم:

$$\Delta v_{۱} = S_{۱} = ۲\times۵ = ۱۰\ m/s \Rightarrow v_{۵s} - v_{\circ} = ۱۰ \Rightarrow v_{۵s} - (-۶) = ۱۰ \Rightarrow v_{۵s} = ۴\ m/s$$

$$\Delta v_{۲} = ۰ \Rightarrow v_{۸s} - v_{۵s} = ۰ \Rightarrow v_{۸s} = v_{۵s} = ۴\ m/s$$

$$\Delta v_{۳} = -S_{۳} = -(۱۲-۸)\times(۴) = -۱۶\ m/s \Rightarrow v_{۱۲s} - v_{۸s} = -۱۶ \Rightarrow v_{۱۲s} - ۴ = -۱۶ \Rightarrow v_{۱۲s} = -۱۲\ m/s$$

↓ نمودار پایین محور زمان

گام دوم: در بازهٔ زمانی که متحرک به صورت تندشونده حرکت می‌کند، نمودار v ـ t از محور زمان دور می‌شود و در بازهٔ زمانی که در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند ($v < ۰$)، نمودار زیر محور زمان قرار دارد؛ براساس این دو مورد، بازهٔ زمانی مد نظر تست بازهٔ زمانی t تا ۱۲ s است. قضیهٔ تالس را برای مثلث‌های متشابه ۱ و ۲ می‌نویسیم تا t به دست آید:

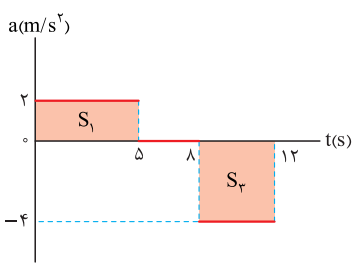
$$\frac{۱۲-t}{t-۸} = \frac{۱۲}{۴} \Rightarrow ۱۲-t = ۳t-۲۴ \Rightarrow ۴t = ۳۶ \Rightarrow t = ۹\ s$$

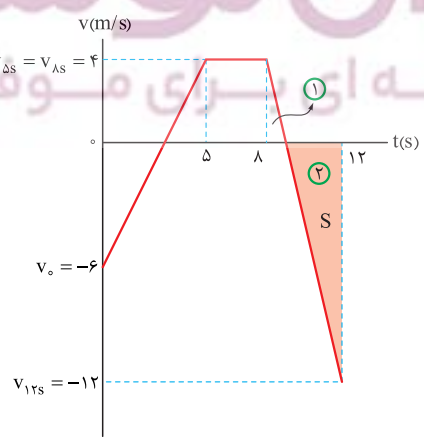
گام سوم: اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۹ s تا ۱۲ s برابر مساحت مثلث ۲ است:

$$|\Delta x| = S = \frac{۱۲\times(۱۲-۹)}{۲} = ۱۸\ m$$

اندازهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازهٔ زمانی برابر است با:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{۱۸}{۱۲-۹} = ۶\ m/s$$





ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

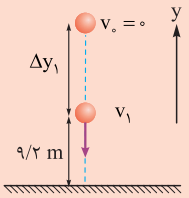
۵۴ سنگی را در شرایط خلأ از بالای ساختمانی رها می‌کنیم. این سنگ ۰/۴ s قبل از رسیدن به سطح زمین از ارتفاع ۹/۲ متری سطح زمین عبور می‌کند. ارتفاع ساختمان چند متر است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۱۱/۲۵ ۲) ۲۴/۲
۳) ۳۱/۲۵ ۴) ۳۱/۷

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: سرعت سنگ را ۰/۴ s قبل از رسیدن به زمین به دست می‌آوریم. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t \Rightarrow -9/2 = -\frac{1}{2}(10)(0/4)^2 + v_1(0/4)$$

$$\Rightarrow -8/4 = v_1(0/4) \Rightarrow v_1 = -21\ m/s$$

گام دوم: با توجه به شکل بالا، Δy_1 را به دست می‌آوریم:

$$v_1^2 - v_0^2 = -2g\Delta y_1 \Rightarrow (-21)^2 - 0^2 = -2(10)(\Delta y_1)$$

$$\Rightarrow 441 = -20\Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1 = -22/05\ m$$

گام سوم: ارتفاع ساختمان را حساب می‌کنیم:

$$h = |\Delta y_1| + 9/2 = 22/05 + 9/2 = 31/25\ m$$

کنکور

سنگی را در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۲/۸ متر رها می‌کنیم. این سنگ ۰/۶ ثانیه قبل از رسیدن به زمین از ارتفاع چند متری می‌گذرد؟ $(g = 10\ m/s^2)$ *(سؤال ۴۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ ـ نوبت دوم)*

۱) ۷/۸ ۲) ۶/۸ ۳) ۶ ۴) ۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۵ در لحظهٔ $t = ۰$ و در شرایط خلأ، از ارتفاع ۱۸۰ متری سطح زمین گلولهٔ A بدون تندی اولیه رها شده و در لحظهٔ $t = ۳\ s$ گلولهٔ B از ارتفاع h رها می‌شود. فاصلهٔ بین این دو گلوله تا قبل از رسیدن یکی از آن‌ها به سطح زمین، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. کدام موارد می‌تواند h برحسب متر باشد؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

الف) ۱۴۵ ب) ۱۳۰

پ) ۱۱۰ ت) ۲۲

۱) «الف» و «ب» ۲) «الف» و «ت»

۳) «ب» و «پ» ۴) «پ» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای این‌که فاصلهٔ دو گلوله، ابتدا کاهش و سپس افزایش یابد، با توجه به این‌که گلولهٔ B دیرتر از گلولهٔ A رها می‌شود، باید در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ B، گلولهٔ A بالاتر از آن باشد (شرط اول). از طرفی، گلولهٔ A زودتر از گلولهٔ B به زمین برسد (شرط دوم)، بنابراین داریم:

$$(\text{شرط اول})\ (۰-۳\ s):\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow \Delta y_A=-۴/۹(۳^۲)=-۴۴/۱\ m$$

$$t=۳\ s: h_A=۱۸۰-۴۴/۱=۱۳۵/۹\ m \xrightarrow{h_A>h} h<۱۳۵/۹\ m$$

بنابراین مورد «الف» نمی‌تواند h باشد.

$$(\text{شرط دوم})\ \Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow -۱۸۰=-۴/۹t_A^۲ \Rightarrow t_A\simeq ۶\ s$$

$$t_A<t_B \Rightarrow t_B>۶\ s \Rightarrow \Delta y_B=-\frac{۱}{۲}g(t-۳)^۲ \Rightarrow h=۴/۹(t-۳)^۲>۴۴/۱\ m$$

بنابراین مورد «ت» نمی‌تواند باشد.

تیزبازی

با توجه به این‌که اختلاف بین گزینه‌ها نسبتاً زیاده، اگه $g=۱۰\ m/s^۲$ در نظر بگیری، راحت‌تر می‌تونی محاسبات رو انجام بدی.

$$\Delta y_A=-۵(t^۲)=-۴۵\ m \Rightarrow t=۳\ s: h_A=۱۴۵\ m$$

$$t_{\text{برخورد}}=t' \Rightarrow \begin{cases} ۱۸۰=۵t_A'^۲ \Rightarrow t_A'=۶\ s \\ t_B'>۶ \Rightarrow h_B>۵(t'-۳)^۲=۴۵\ m \end{cases} \Rightarrow ۴۵\ m<h_B<۱۴۵\ m$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

کنکور

گلوله‌ای از فاصلهٔ ۱۰۰ متری زمین از یک نقطه رها می‌شود. یک ثانیه بعد، گلولهٔ دیگری از ده متر پایین‌تر از گلولهٔ اول رها می‌شود. از لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ دوم تا لحظه‌ای که اولین گلوله به زمین می‌رسد، فاصلهٔ دو گلوله چه تغییری می‌کند؟ (مقاومت هوا ناچیز فرض شود.)

(سؤال ۴۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۲ ـ نوبت دوم)

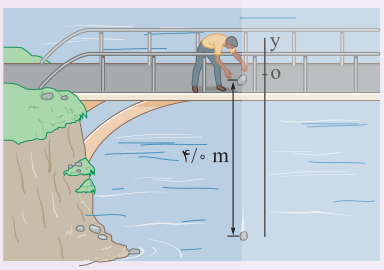
۱) ثابت می‌ماند.

۲) افزایش می‌یابد.

۳) کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش می‌یابد و سپس افزایش می‌یابد.

کتاب درسی



شکل روبه‌رو، شخصی را نشان می‌دهد که ابتدا سنگی را از بالای پلی به داخل رودخانه‌ای رها کرده است. وقتی سنگ مسافت ۴/۰ m را طی می‌کند، سنگ دیگری دوباره از همان ارتفاع توسط شخص رها می‌شود. توضیح دهید آیا با گذشت زمان و تا قبل از برخورد سنگ اول به سطح آب رودخانه، فاصلهٔ بین دو سنگ کاهش یا افزایش می‌یابد یا تغییری نمی‌کند.

(فیزیک (۳) ـ تمرین ۱ ـ ۱۳ صفحهٔ ۲۴ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۶ در شرایط خلأ، گلوله‌ای بدون سرعت اولیه رها می‌شود و پس از ۶ s به سطح زمین می‌رسد. جابه‌جایی این گلوله در ۱/۵ ثانیهٔ اول حرکتش چند برابر جابه‌جایی گلوله در بقیهٔ راه تا قبل از رسیدن به زمین است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

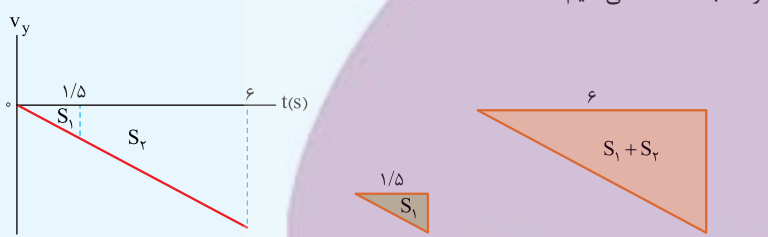
پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق رابطهٔ $\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲$، اگر جابه‌جایی در کل مسیر Δy و جابه‌جایی در ۱/۵ ثانیهٔ اول $\Delta y_۱$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta y = \Delta y_۱ + \Delta y_۲ \Rightarrow \begin{cases} \Delta y_۱ = -\frac{۱}{۲}g(۱/۵^۲) \\ \Delta y = -\frac{۱}{۲}g(۶^۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y_۱}{\Delta y} = \frac{-\frac{۱}{۲}g(\frac{۹}{۴})}{-\frac{۱}{۲}g(۳۶)} = \frac{\frac{۹}{۴}}{۳۶} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \Delta y_۱ = \frac{۱}{۱۶}\Delta y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{۱}{۱۶}\Delta y + \Delta y_۲ \Rightarrow \Delta y_۲ = \frac{۱۵}{۱۶}\Delta y \Rightarrow \frac{\Delta y_۱}{\Delta y_۲} = \frac{\frac{۱}{۱۶}\Delta y}{\frac{۱۵}{۱۶}\Delta y} = \frac{۱}{۱۵}$$

یه‌جور دیگه ✔ نمودار v ـ t را رسم می‌کنیم و از تشابه استفاده می‌کنیم:



$$\frac{S_۱ + S_۲}{S_۱} = (\frac{۶}{۱/۵})^۲ = ۱۶ \Rightarrow S_۱ + S_۲ = ۱۶S_۱ \Rightarrow S_۲ = ۱۵S_۱ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{S_۱}{۱۵S_۱} = \frac{۱}{۱۵}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۷ کدام موارد با توجه به قوانین نیوتون درست است؟

الف) اگر تندی حرکت متحرکی ثابت باشد، نیروی خالص وارد بر آن صفر است.

ب) شتاب یک جسم در جهت نیروی خالص وارد بر آن جسم است.

پ) نیروهای کنش و واکنش، هم‌اندازه هستند و اثرات یکسانی دارند.

ت) اگر نیروی کنش از نوع گرانشی باشد، قطعاً نیروی واکنش نیز از نوع گرانشی است.

۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «پ»
۳) «ب» و «ت»
۴) «پ» و «ت»

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

با توجه به متن کتاب درسی، موارد «ب» و «ت» درست هستند.

بررسی علت نادرستی موارد «الف» و «پ»:

الف) در صورتی که جهت حرکت تغییر کند، حرکت شتابدار بوده و نیروی خالص صفر نیست؛ مثل حرکت دایره‌ای با تندی ثابت؛ بنابراین این عبارت نادرست است.

پ) نیروهای کنش و واکنش اثرات متفاوتی دارند؛ بنابراین این عبارت نادرست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۸ **شخصی روی صندلی خودروی خود نشسته و در حال رانندگی است. نیروی واکنش وزن این شخص نیرویی است که ..... .**

۱) از طرف شخص بر صندلی وارد می‌شود

۲) از طرف صندلی بر شخص وارد می‌شود

۳) از طرف شخص بر زمین وارد می‌شود

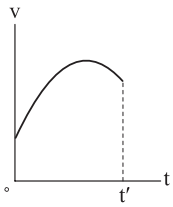
۴) از طرف زمین بر شخص وارد می‌شود

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ طبق قانون سوم نیوتون، واکنش هر نیرویی به منشأ ایجادکنندهٔ آن نیرو وارد می‌شود؛ بنابراین با توجه به این‌که نیروی کنش وزن از طرف زمین بر شخص وارد می‌شود، واکنش این نیرو از طرف شخص بر زمین وارد می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر قسمتی از یک سهمی است. بزرگی نیروی خالص وارد بر این جسم از $t = 0$ تا t' چگونه تغییر می‌کند؟**



۱) پیوسته افزایش می‌یابد.

۲) پیوسته کاهش می‌یابد.

۳) ابتدا کاهش سپس افزایش پیدا می‌کند.

۴) ابتدا افزایش سپس کاهش پیدا می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، درمی‌یابیم اندازهٔ شیب نمودار یعنی اندازهٔ شتاب، در بازهٔ زمانی صفر تا t' ابتدا کاهش و سپس افزایش یافته است؛ بنابراین طبق قانون دوم نیوتون $F_{net} = ma$، اندازهٔ نیروی خالص وارد بر متحرک نیز ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۰ **اتومبیلی روی خط راست با سرعت $108\ km/h$ در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی با شتاب ثابت ترمز می‌کند و پس از طی مسافت Δx می‌ایستد. اگر جرم راننده $80\ kg$ و اندازهٔ نیروی خالص وارد بر او $360\ N$ باشد، Δx چند متر است؟**

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰

۳) ۱۸۰ ۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: به کمک قانون دوم نیوتون، شتاب راننده (که همان شتاب اتومبیل است) را به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که چون شتاب ناشی از ترمز در خلاف جهت حرکت جسم است، علامت آن باید منفی باشد:

$$|F| = m|a| \Rightarrow 360 = 80|a| \Rightarrow |a| = 4/5\ m/s^2 \xrightarrow{a<0} a = -4/5\ m/s^2$$

گام دوم: به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، خواستهٔ تست را حساب می‌کنیم:

$$v_0 = 108\ km/h = \frac{108}{3/6}\ m/s = 30\ m/s$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - 30^2 = 2\times(-4/5)\times\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{-900}{-9} = 100\ m$$

کنکور

اتومبیلی روی خط راست با سرعت $72\ km/h$ در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی با شتاب ثابت ترمز می‌کند و پس از $5\ s$ می‌ایستد. اگر جرم راننده $80\ kg$ باشد، نیروی خالص وارد بر راننده چند نیوتون است؟

(کنکور تجربی ۱۴۰۳ ـ نوبت دوم)

۱) ۳۲۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۱۶۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

فیزیک دهم

۶۱ با شلیک یک تفنگ، گلوله‌ای به جرم ۴۰ g با تندی ۷۲۰ km / h از لولهٔ تفنگ خارج می‌شود. انرژی جنبشی این گلوله چند ژول است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۸۰۰

۳) ۴۰۰۰ ۴) ۸۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint قراره فقط در حد جای‌گذاری تو رابطه، وقتتون رو بگیره!

درس Box

انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی v در حال حرکت است، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

(K: انرژی جنبشی (J)، m: جرم جسم (kg)، v: تندی جسم (m / s))

تبدیل یکای تندی از «کیلومتر بر ساعت» به «متر بر ثانیه» و برعکس:

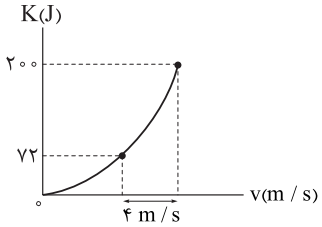
$$km/h \xrightarrow[\times 3/6]{\div 3/6} m/s$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔ کافی است داده‌های مسئله را در رابطهٔ انرژی جنبشی جای‌گذاری کنیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow[v=720\,km/h=200\,m/s]{m=40\,g=4\times10^{-2}\,kg} K = \frac{1}{2}\times 4\times 10^{-2}\times (200)^2 = 800\,J$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۲ شکل زیر، نمودار انرژی جنبشی یک جسم برحسب تندی آن است. جرم این جسم چند کیلوگرم است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

رابطهٔ انرژی جنبشی رو به صورت نسبتی بنویسید.

درس Box

رابطهٔ نسبتی انرژی جنبشی برای دو حالت مختلف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{K_۲}{K_۱}=\frac{m_۲}{m_۱}\times(\frac{v_۲}{v_۱})^۲$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: رابطهٔ انرژی جنبشی را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$\frac{K_۲}{K_۱}=\frac{m_۲}{m_۱}\times(\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow{K_۲=۲۰۰\,J,\,K_۱=۷۲\,J} \frac{۲۰۰}{۷۲}=\frac{۱۰۰}{۳۶}=(\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$\xrightarrow{v_۲=v_۱+۴\,m/s} \frac{v_۲}{v_۱}=\frac{۱۰}{۶} \Rightarrow \frac{v_۱+۴}{v_۱}=\frac{۱۰}{۶} \Rightarrow v_۱=۶\,m/s \text{ و } v_۲=۱۰\,m/s$$

گام دوم: حالا برای پیداکردن جرم، کافی است رابطهٔ انرژی جنبشی را برای یکی از نقاط بنویسیم:

$$K_۱=\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \Rightarrow \frac{۷۲}{}=\frac{۱}{۲}m\times\frac{۳۶}{} \Rightarrow m=۴\,kg$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۳ اسبی با تندی ثابت $۴\ m/s$ در راستای افقی حرکت می‌کند و ارابه‌ای را با نیروی $۵۰۰\ N$ که با راستای افقی زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، به دنبال خود می‌کشد. این اسب در مدت یک دقیقه چند کیلوژول کار روی ارابه انجام می‌دهد؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint کافی است در رابطهٔ کار نیروی ثابت، داده‌ها رو جای‌گذاری کنین.

درس Box وقتی نیروی ثابت $\vec{F}$ به جسمی وارد شود و جسم به اندازهٔ d جابه‌جا شود، کار انجام‌شده برابر است با:

$W = F d \cos\theta$ (W: کار (J)، d: جابه‌جایی (m)، F: نیرو (N)، θ: زاویهٔ بین $\vec{F}$ و $\vec{d}$)

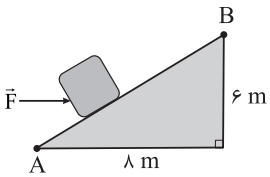
نکته جابه‌جایی در این سؤال از رابطهٔ $x = v\Delta t$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی کافی است تا رابطهٔ کار نیروی ثابت را بنویسیم و خواهیم داشت:

$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}]{F=۵۰۰\ N,\ d=v\Delta t=۴\times ۶۰=۲۴۰\ m} W = ۵۰۰\times ۲۴۰\times \frac{۱}{۲} = ۶۰۰۰۰\ J = ۶۰\ kJ$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۴ در شکل زیر، جسمی که روی سطح شیبدار قرار دارد، توسط نیروی ثابت و افقی $F = ۲۰\ N$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. کار نیروی $\vec{F}$ در طی این جابه‌جایی چند ژول است؟



۱) ۲۸۰
۲) ۲۰۰
۳) ۱۶۰
۴) ۱۲۰

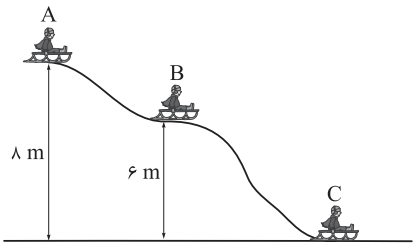
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ از رابطهٔ کار نیروی ثابت استفاده می‌کنیم و کار نیروی $\vec{F}$ را به دست می‌آوریم. *هواستون باشه که* در این رابطه به جابه‌جایی افقی نیاز داریم:

$$W = Fd\cos\theta \xrightarrow[\theta=۰,\ \cos ۰^\circ = ۱]{F=۲۰\ N,\ d=۸\ m} W = ۲۰ \times ۸ \times ۱ = ۱۶۰\ J$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۵ مطابق شکل زیر، یک کودک روی سرسره‌ای به ارتفاع ۸ m از نقطهٔ A شروع به سرخوردن می‌کند. کار نیروی وزن وارد بر کودک در مسیر A تا B چند برابر کار نیروی وزن در مسیر B تا C است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

اگر جسمی به جرم m از ارتفاع $h_۱$ از سطح زمین به ارتفاع $h_۲$ جابه‌جا شود، تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta U = m g \Delta h = mg(h_۲ - h_۱)$$

(تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی (J)) ← (جرم (kg)) ↑ (شتاب گرانش (N/kg)) ↓ (تغییرات ارتفاع (m)) ↗

کار نیروی وزن، همواره برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی است:

$$W_{وزن} = -\Delta U$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا کار نیروی وزن را در مسیر A تا B محاسبه می‌کنیم:

$$W_{وزن} = -\Delta U = -mg\Delta h \xrightarrow{\Delta h = -۲\ m} W_{وزن(A,B)} = ۲mg$$

گام دوم: حالا کار نیروی وزن را در مسیر B تا C محاسبه می‌کنیم:

$$W_{وزن} = -\Delta U = -mg\Delta h \xrightarrow{\Delta h = -۶\ m} W_{وزن(B,C)} = ۶mg$$

گام سوم: حالا نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

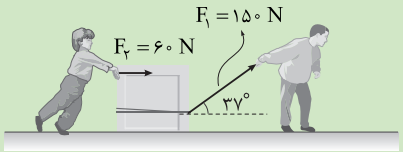
$$\frac{W_{وزن(A,B)}}{W_{وزن(B,C)}} = \frac{۲mg}{۶mg} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

یه‌جور دیگه

کار نیروی وزن، وابسته به ارتفاع است و واضح است که تغییر ارتفاع مسیر اول، ۲ متر و تغییر ارتفاع مسیر دوم، ۶ متر است؛ پس نسبت خواسته‌شده برابر است با: $\frac{۲}{۶}$ یا $\frac{۱}{۳}$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۶ پدر و پسری مطابق شکل زیر، جعبهٔ سنگینی را روی سطح افقی، $4\ m$ جابه‌جا می‌کنند. اگر کار کل انجام‌شده روی جعبه، $600\ J$ باشد، بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جعبه، چند نیوتون است؟ $(\cos 37^\circ = 0/8)$



۱) ۳۰
۲) ۲۵
۳) ۲۰
۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

کار کل انجام شده روی یک جسم، از جمع جبری تمامی کارهای انجام‌شده روی آن به دست می‌آید:

$$W_t = W_1 + W_2 + \dots$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: مطابق رابطهٔ کار کل، تمامی کارهای انجام‌شده روی جسم را می‌نویسیم:

$$W_t = W_{F_1} + W_{F_2} + W_f$$

گام دوم: حالا داده‌ها را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$W_t = W_{F_1} + W_{F_2} + W_f$$

$$\Rightarrow W_t = F_1 d\cos 37^\circ + F_2 d\cos 0^\circ + f d\cos 180^\circ$$

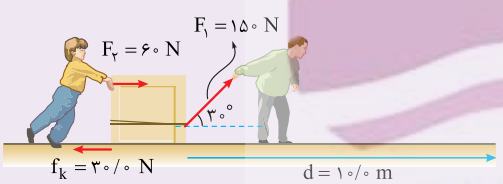
$$\xrightarrow[\cos 0^\circ = 1,\ \cos 37^\circ = 0/8,\ \cos 180^\circ = -1]{d=4\ m,\ W_t=600\ J,\ F_1=150\ N,\ F_2=60\ N} 600 = 150\times 4\times 0/8 + 60\times 4\times 1 + (-f\times 4)$$

$$\Rightarrow 600 = 480 + 240 - 4f$$

$$\Rightarrow -120 = -4f \Rightarrow f = 30\ N$$

کتاب درسی

شکل مقابل، پدر و پسری را در حال جابه‌جاکردن یک جعبهٔ سنگین روی سطحی هموار نشان می‌دهد. نیروی F_1 را پدر و نیروی F_2 را پسر به جسم وارد می‌کند و f_k نیز نیروی اصطکاک جنبشی است که با حرکت جسم مخالفت می‌کند و در خلاف جهت جابه‌جایی به جعبه وارد می‌شود. کار کل انجام‌شده روی جسم را محاسبه کنید.



(فیزیک (۱) ـ مثال ۳ ـ ۵ صفحهٔ ۵۹ کتاب درسی)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۷ جسمی روی سطح افقی دارای اصطکاک، در لحظهٔ $t_۰ = ۰$ با تندی $v_۰$ پرتاب می‌شود و تندی آن در لحظهٔ t به v می‌رسد. اگر کار نیروی اصطکاک جنبشی روی جسم از لحظهٔ $t_۰$ تا t، دو برابر کار نیروی اصطکاک جنبشی از لحظهٔ t تا لحظهٔ توقف باشد، $\frac{v_۰}{v}$ کدام است؟ (اندازهٔ نیروی اصطکاک در طول مسیر ثابت است.)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی: کار کل انجام‌شده روی یک جسم با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است:

$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_۲ - K_۱$

W_t : (J) کار برایند

$K_۲$: (J) انرژی جنبشی در حالت ۲

$K_۱$: (J) انرژی جنبشی در حالت ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی را برای دو بازهٔ زمانی می‌نویسیم:

بازهٔ اول: $(t_۰, t)$ $W_{f_۱} = K_t - K_{t_۰} = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۰^۲$

بازهٔ دوم: (t تا لحظهٔ توقف) $W_{f_۲} = K_{\text{توقف}} - K_t = ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲ = -\frac{۱}{۲}mv^۲$

گام دوم: شرط صورت مسئله را وارد می‌کنیم:

$W_{f_۱} = ۲W_{f_۲}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲) = ۲(-\frac{۱}{۲}mv^۲)$

$\Rightarrow v^۲ - v_۰^۲ = -۲v^۲$

$\Rightarrow v^۲ + ۲v^۲ = v_۰^۲ \Rightarrow v_۰^۲ = ۳v^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{v_۰}{v} = \sqrt{۳}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۸ در شرایط خلأ، گلوله‌ای به جرم $۳\ kg$ از ارتفاع h با تندی $۲۰\ m/s$ پرتاب می‌شود. اگر انرژی جنبشی گلوله در ارتفاع $\frac{۲}{۳}h$ برابر با $۷۴۰\ J$ باشد، ارتفاع h چند متر است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

۱) ۲۱ ۲) ۱۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

به مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی گفته می‌شود:

$$E = K + U$$

K: انرژی جنبشی (J)، U: انرژی پتانسیل (J)، E: انرژی مکانیکی (J)

اگر نیروهای اتلافی را نادیده بگیریم، انرژی مکانیکی در تمام مسیر حرکت جسم ثابت است و داریم:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K_۱ + U_۱ = K_۲ + U_۲$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای ارتفاع h یعنی شروع و ارتفاع $\frac{۲}{۳}h$ اصل پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

$$E_۱ = E_۲$$

$$\Rightarrow U_۱ + K_۱ = U_۲ + K_۲$$

گام دوم: حالا با جای‌گذاری داده‌ها خواهیم داشت:

$$mgh + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = mg\frac{۲}{۳}h + K_۲ \xrightarrow[v_۱=۲۰\ m/s]{K_۲=۷۴۰\ J,\ m=۳\ kg,\ g=۱۰\ N/kg} ۳۰h + ۶۰۰ = ۲۰h + ۷۴۰$$

$$\Rightarrow ۱۰h = ۱۴۰ \Rightarrow h = ۱۴\ m$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۹ **اگر نیروی خالص وارد بر یک جسم متحرک در یک مسیر صفر باشد، کدام موارد الزاماً درست هستند؟**

الف) تندی جسم ثابت است.

ب) انرژی مکانیکی جسم ثابت است.

پ) کار کل انجام‌شده روی جسم، صفر است.

۱) «الف» و «ب»
۲) «الف» و «پ»
۳) «ب» و «پ»
۴) «الف»، «ب» و «پ»

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ تک‌تک عبارات را بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛ طبق قانون اول نیوتون، اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد ($\vec{F}_{net} = 0$)، شتاب جسم صفر خواهد بود ($\vec{a} = 0$). شتاب صفر یعنی بردار سرعت ثابت است (ثابت $= \vec{v}$).

وقتی بردار سرعت ثابت باشد، هم جهت حرکت و هم اندازهٔ سرعت (یعنی تندی $|\vec{v}|$) در طول مسیر الزاماً ثابت می‌ماند.

ب) نادرست؛ انرژی مکانیکی برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل: $E = K + U$. هرچند تندی ثابت است و بنابراین انرژی جنبشی (K) ثابت می‌ماند، اما شرطی روی ثابت‌ماندن انرژی پتانسیل (U) وجود ندارد.

پ) درست؛ چون نیروی خالص صفر است، کار نیروی خالص هم صفر می‌شود؛ بنابراین کار کل انجام‌شده روی جسم که همان کار نیروی خالص است هم برابر صفر می‌شود.

بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

کنکور **اگر تندی جسمی در یک مسیر ثابت بماند، کدام موارد الزاماً درست است؟** *(سؤال ۲۳۲ ـ کنکور تجربی ۱۴۰۰ (خارج از کشور))*

الف) کار نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.

ب) انرژی مکانیکی جسم ثابت می‌ماند.

پ) نیروی خالص وارد بر جسم صفر است.

۱) الف
۲) پ
۳) الف و ب
۴) ب و پ

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۰ جسمی را از پایین سطح شیبداری که با افق زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، با تندی $۶\ m/s$ رو به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم روی سطح شیبدار $۳\ m$ بالا می‌رود و سپس به نقطهٔ پرتاب بازمی‌گردد. تندی جسم در لحظهٔ بازگشت به نقطهٔ پرتاب، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = ۱۰\ m/s^۲$ و اندازهٔ نیروی اصطکاک در طول مسیر ثابت است.)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

با توجه به قانون پایستگی انرژی، تغییرات انرژی مکانیکی برابر با کار نیروی اتلافی است:

$$W_f = E_۲ - E_۱$$

W_f: کار نیروی اتلافی (J)، $E_۲$: انرژی مکانیکی ثانویه (J)، $E_۱$: انرژی مکانیکی اولیه (J)

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا مسیر رفت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. انرژی مکانیکی در نقطهٔ پرتاب برابر است با:

$$E_۱ = K_۱ + U_۱ \xrightarrow{h_۱=۰} E_۱ = K_۱$$

$$\Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \xrightarrow{v_۱=۶\ m/s} E_۱ = ۱۸m\ (J)$$

انرژی مکانیکی در نقطهٔ اوج برابر است با:

$$E_۲ = K_۲ + U_۲ \xrightarrow{v_۲=۰} E_۲ = U_۲$$

$$\Rightarrow E_۲ = mgh_۲ \xrightarrow[h_۲ = d\times\sin ۳۰^\circ = ۱/۵\ m]{g=۱۰\ N/kg} E_۲ = ۱۵m\ (J)$$

کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت:

$$E_۲ - E_۱ = W_f \Rightarrow ۱۵m - ۱۸m = -۳m = W_f$$

گام دوم: حالا مسیر برگشت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. انرژی مکانیکی در نقطهٔ اوج، همان $E_۲$ گام اول است و انرژی مکانیکی در لحظهٔ برگشت برابر است با:

$$E_۳ = \frac{۱}{۲}mv_۳^۲$$

چون جسم همان مسیر رفت را برمی‌گردد، پس کار نیروی اصطکاک در مسیرهای رفت و برگشت برابر است. داریم:

$$E_۳ - E_۲ = W_f$$

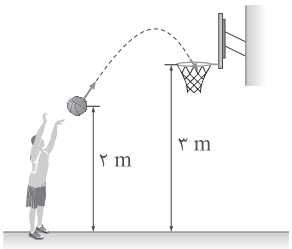
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۳^۲ - ۱۵m = -۳m$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۳^۲ = ۱۲m$$

$$\Rightarrow v_۳^۲ = ۲۴ \Rightarrow v_۳ = ۲\sqrt{۶}\ m/s$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۱ در شکل زیر، توپی به جرم $500\ g$ با تندی اولیهٔ $10\ m/s$ پرتاب شده و با تندی $8\ m/s$ وارد حلقه می‌شود. کار نیروی مقاومت هوا روی توپ از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ رسیدن توپ به حلقه چند ژول است؟ $(g = 10\ m/s^2)$



۱) ۲

۲) ۴

۳) -2

۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا انرژی مکانیکی در لحظهٔ پرتاب را به دست می‌آوریم و $h = 2\ m$ را مبدأ پتانسیل در نظر می‌گیریم:

$$E_1 = K_1 + \cancel{U_1^{0}} \Rightarrow E_1 = K_1$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow[v_1=10\ m/s]{m=500\ g=0/5\ kg} E = \frac{1}{2}\times\frac{5}{10}\times 100 = 25\ J$$

گام دوم: حالا انرژی مکانیکی در لحظه‌ای که توپ به سبد می‌رسد را محاسبه می‌کنیم:

$$E_2 = K_2 + U_2$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg\Delta h \xrightarrow{\Delta h=1\ m,\ g=10\ N/kg,\ v_2=8\ m/s} E_2 = \frac{1}{2}\times\frac{5}{10}\times 64 + \frac{5}{10}\times 10\times 1 = 16 + 5 = 21\ J$$

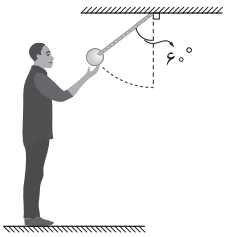
گام سوم: حالا مطابق قانون پایستگی انرژی، کار نیروی مقاومت هوا را به دست می‌آوریم:

$$W_f = E_2 - E_1 = 21 - 25 = -4\ J$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۲ شکل زیر، گلوله‌ای به جرم ۲ kg را نشان می‌دهد که توسط ریسمانی به طول ۲ m و جرم ناچیز از سقف اتاقی آویزان است. دانش‌آموزی این گلوله را ۶۰° از وضعیت تعادل خارج کرده و آن را رها می‌کند. اگر بیشینه زاویهٔ ریسمان با راستای قائم در طرف مقابل به ۵۳° برسد، بزرگی کار نیروهای اتلافی در طی این جابه‌جایی گلوله چند ژول است؟

$(\cos 53^\circ = 0/6, g = 10\ m/s^2)$



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

ارتفاع یک آونگ به طول L در زاویهٔ انحراف θ نسبت به پایین‌ترین نقطه، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$h = L(1-\cos\theta)$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: پایین‌ترین نقطهٔ مسیر (وضعیت تعادل قائم آونگ) را به عنوان مبدأ پتانسیل گرانشی $(h=0)$ در نظر می‌گیریم.

ارتفاع در نقطهٔ اولیه $(\theta = 60^\circ)$:

$$h_1 = L(1-\cos 60^\circ) \xrightarrow{L=2\ m,\ \cos 60^\circ=\frac{1}{2}} h_1 = 2(1-\frac{1}{2}) = 1\ m$$

ارتفاع در نقطهٔ اوج سمت مقابل $(\theta = 53^\circ)$:

$$h_2 = L(1-\cos 53^\circ) \xrightarrow{L=2\ m,\ \cos 53^\circ=0/6} h_2 = 2(1-0/6) = 0/8\ m$$

گام دوم: در هر دو نقطه، انرژی مکانیکی را محاسبه می‌کنیم. در هر دو وضعیت (لحظهٔ رهاشدن و بیشینهٔ ارتفاع در طرف مقابل)، تندی گلوله صفر است $(v_1 = 0$ و $v_2 = 0)$؛ در نتیجه انرژی جنبشی در هر دو نقطه برابر صفر است:

$$K_1 = 0\ ,\ K_2 = 0$$

انرژی مکانیکی در نقطهٔ آغاز:

$$E_1 = K_1 + U_1 \xrightarrow{K_1=0} E_1 = U_1 = mgh_1 \xrightarrow[g=10\ N/kg,\ h_1=1\ m]{m=2\ kg} E_1 = 2\times 10\times 1 = 20\ J$$

انرژی مکانیکی در نقطهٔ اوج مقابل:

$$E_2 = K_2 + U_2 \xrightarrow{K_2=0} E_2 = U_2 = mgh_2 \xrightarrow{h_2=0/8\ m} E_2 = 2\times 10\times 0/8 = 16\ J$$

گام سوم: حالا کار نیروهای اتلافی را محاسبه می‌کنیم:

$$E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow W_f = 16-20 = -4\ J \Rightarrow |W_f| = 4\ J$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۳ لوکوموتیوی با تندی ثابت $90\ km/h$ روی ریلی افقی در حرکت است. اگر توان مفید موتور این لوکوموتیو برابر با $5000\ hp$ باشد، بزرگی برایند نیروهای اتلافی در مسیر حرکت این لوکوموتیو چند کیلونیوتون است؟

$(1\ hp = 750\ W)$

۱) ۳۰ ۲) ۳۰۰

۳) ۱۵ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

در حل برخی سؤالات توان، وقتی سرعت و نیرو در سؤالات مطرح می‌شوند، از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$P = Fv\cos\theta$$

- P : توان لحظه‌ای (W)
- F : اندازهٔ نیرویی که در آن لحظه وارد می‌شود (N)
- v : تندی جسم در همان لحظه (m/s)
- θ : زاویه‌ای که بردار نیرو با بردار سرعت می‌سازد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

کافی است F را از طریق رابطهٔ درس‌باکس به دست آوریم:

$$P = Fv \xrightarrow[v=90\ km/h=25\ m/s]{P=(5000\times750)W} 5000\times750 = F\times25 \Rightarrow F = 150000\ N = 150\ kN$$

چون تندی لوکوموتیو ثابت است، بزرگی برایند نیروهای اتلافی برابر با F است، یعنی:

$$f = F = 150\ N$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۴ پمپ آبی با مصرف توان الکتریکی $400\ W$ در هر دقیقه $120\ kg$ آب را توسط لوله‌ای تا ارتفاع $10\ m$ بالا برده و با تندی $10\ m/s$ از دهانهٔ لوله به بیرون پرتاب می‌کند. بازده این پمپ چند درصد است؟ $(g = 10\ m/s^2)$

۱) ۸۰ ۲) ۷۵

۳) ۶۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) **توان:** در فیزیک، آهنگ انجام کار را با کمیتی به نام توان توصیف می‌کنیم. توان همانند کار و انرژی، کمیتی است نرده‌ای و به صورت آهنگ انجام کار بیان می‌شود. یکای آن در SI، وات $(W = \frac{J}{s})$ است.

توان (W)

$$P = \frac{W}{t}$$

کار (J)

زمان (s)

۲) **بازده:** تنها بخشی از انرژی ورودی قابل استفاده است که به آن انرژی خروجی یا کار مفید می‌گویند. نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی را بازده می‌نامیم.

بازده هر سامانه را برحسب درصد بیان می‌کنند که همواره عددی کوچک‌تر از ۱۰۰ است. از رابطهٔ زیر می‌توان بازده هر سامانه را برحسب درصد محاسبه کرد:

$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100 = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا کار مفید و توان مفید را به دست می‌آوریم:

$$U = mgh \xrightarrow[g=10\ N/kg,\ h=10\ m]{m=120\ kg} U = 120 \times 10 \times 10 = 12000\ J$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=10\ m/s} K = \frac{1}{2} \times 120 \times 100 = 6000\ J$$

$$E = K + U \Rightarrow E = 18000\ J$$

حالا توان مفید را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E}{t} = \frac{18000}{60} = 300\ W$$

گام دوم: حالا بازده را محاسبه می‌کنیم:

$$Ra = \frac{\text{توان مفید}}{\text{(کل) توان مصرفی}} \times 100 = \frac{300}{400} \times 100 = \%75$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۵ **بازده کل یک سامانهٔ تولید برق در نیروگاه و خطوط انتقال آن ۲۴ درصد است. کدام گزینه نمی‌تواند به ترتیب بازده درصدی تولید برق نیروگاه و بازده درصدی خطوط انتقال برق این سامانه باشد؟**

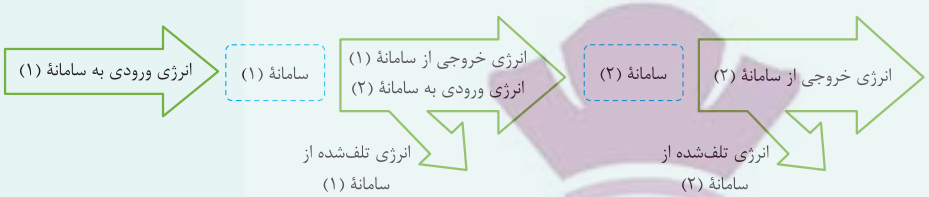
۱) ۸۰ ،۳۰
۲) ۷۵ ،۳۲
۳) ۵۵ ،۴۸
۴) ۹۶ ،۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint باید حواستون رو جمع کنین که حاصل‌ضرب دو عدد بشه ۲۴!

درس Box بازده مجموعه‌های چندسامانه‌ای برابر با حاصل‌ضرب بازده تک‌تک سامانه‌های آن است:

$$Ra(\text{کل}) = Ra(۱) \times Ra(۲)$$



پاسخ‌خیلی‌تشریحی کافی است گزینه‌ها را بررسی کرده و مطابق درس‌باکس عمل کنید تا بیابید کدام دو عدد حاصل‌ضرب‌شان ۲۴ نمی‌شود.

گزینهٔ (۱): $\frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۲۴۰۰}{۱۰۰۰۰} = ٪۲۴$ ✓

گزینهٔ (۲): $\frac{۷۵}{۱۰۰} \times \frac{۳۲}{۱۰۰} = \frac{۲۴۰۰}{۱۰۰۰۰} = ٪۲۴$ ✓

گزینهٔ (۳): $\frac{۵۵}{۱۰۰} \times \frac{۴۸}{۱۰۰} = \frac{۲۶۴۰}{۱۰۰۰۰} = ٪۲۶/۴$ ×

گزینهٔ (۴): $\frac{۹۶}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۲۴۰۰}{۱۰۰۰۰} = ٪۲۴$ ✓

پس گزینهٔ (۳) درست می‌باشد.

کنکور **بازده یک نیروگاه تولید برق ۲۵ درصد است و بازده خطوط انتقال برق تولیدشده ۶۰ درصد است. بازده کل این سیستم تولید و انتقال چند درصد است؟** *(سؤال ۶۹ کنکور تجربی ۱۴۰۵)*

۱) ۴۲/۵
۲) ۳۵
۳) ۲۲/۵
۴) ۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۶ اگر سامانهٔ $A(g) \rightleftharpoons 2B(g)$ در حال تعادل باشد، چه تعداد از رابطه‌های زیر به یقین درست است؟ (n، $[\ ]$ و $\bar{R}$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ تعداد مول، غلظت تعادلی و سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده است.)

- $n(B) = 2n(A)$
- $\bar{R}(A) = \bar{R}(B)$
- $[A] = [B]$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی ✔ هیچ‌کدام از موارد داده‌شده، درست نیستند.

بررسی موارد:

در واکنش‌های تعادلی، لزوماً نسبت تعداد مول تعادلی مواد با نسبت ضریب استوکیومتری آن‌ها برابر نیست، اگر فرض کنیم واکنش با a مول A آغاز شده است، می‌توان نوشت:

$$A(g) \rightleftharpoons 2B(g)$$

مول اولیه	a	۰
تغییر مول	$-x$	$+2x$
مول تعادلی	$a-2x$	$2x$

مقدار x و در نتیجه رابطهٔ بین $(a-2x)$ و $2x$ به مقدار ثابت تعادل واکنش بستگی دارد.

در لحظه تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است و نه لزوماً سرعت تولید یا مصرف مواد شرکت‌کننده در واکنش! با توجه به دو برابر بودن ضریب استوکیومتری B نسبت به A، $\bar{R}(B)$، دو برابر $\bar{R}(A)$ است.

$$A(g) \rightleftharpoons 2B(g)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{R}_{\text{واکنش رفت}} = \dfrac{\bar{R}_{\text{A مصرف}}}{1} = \dfrac{\bar{R}_{\text{B تولید}}}{2} \\ \bar{R}_{\text{واکنش برگشت}} = \dfrac{\bar{R}_{\text{B مصرف}}}{2} = \dfrac{\bar{R}_{\text{A تولید}}}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{R}_{\text{رفت}} = \bar{R}_{\text{برگشت}}$$

$$\xrightarrow{\text{در هنگام تعادل}} \frac{\bar{R}_{\text{A مصرف یا تولید}}}{1} = \frac{\bar{R}_{\text{B مصرف یا تولید}}}{2} \Rightarrow \bar{R}(B) = 2\bar{R}(A)$$

با رسیدن به تعادل، غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش ثابت باقی می‌ماند و لزوماً با هم برابر نمی‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۷ ۲/۵ گرم اسید ضعیف HA را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول حاصل را با اضافه‌کردن آب به ۵۰۰ میلی‌لیتر رسانده‌ایم. اگر ۰/۴۷۵ گرم یون A^- در این محلول موجود باشد، ثابت یونش این اسید کدام است؟

$(H = ۱ , A = ۱۹ : g.mol^{-۱})$

۱) $۳/۵۷ \times ۱۰^{-۴}$
۲) $۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$
۳) $۳/۵۷ \times ۱۰^{-۳}$
۴) $۱/۲۵ \times ۱۰^{-۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ‌تشریحی

گام اول: محاسبهٔ غلظت اولیه محلول:

$$\text{mol HA} = ۲/۵\ \text{g HA} \times \frac{۱\ \text{mol HA}}{۲۰\ \text{g HA}} = ۰/۱۲۵\ \text{mol HA}$$

$$M_{HA} = \frac{۰/۱۲۵\ \text{mol}}{۰/۵\ \text{L}} = ۰/۲۵\ \text{mol.L}^{-۱}$$

گام دوم: محاسبهٔ غلظت مولی گونه‌ها در محلول نهایی:

$$?\ \text{mol } A^- = ۰/۴۷۵\ \text{g } A^- \times \frac{۱\ \text{mol } A^-}{۱۹\ \text{g } A^-} = ۰/۰۲۵\ \text{mol } A^-$$

$$[A^-] = [H^+] = \frac{۰/۰۲۵}{۰/۵\ \text{L}} = ۰/۰۵\ \text{mol.L}^{-۱}$$

$$[HA] = \text{غلظت اولیه} - \text{غلظت یونیده‌شده} = M - [H^+] = ۰/۲۵ - ۰/۰۵ = ۰/۲\ \text{mol.L}^{-۱}$$

گام سوم: محاسبهٔ ثابت یونش اسید:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{۰/۰۵ \times ۰/۰۵}{۰/۲} = \frac{۲۵ \times ۱۰^{-۴}}{۲ \times ۱۰^{-۱}} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۳} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۲}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۸ **فرمول شیمیایی جوش‌شیرین به صورت ..... است و هر مول از آن، ..... مول اسید معده را خنثی می‌کند. جوش‌شیرین دارای خاصیت بازی بوده و می‌تواند در واکنش با چربی‌ها ..... تولید کند.**

۱) Na_2CO_3 ـ یک ـ صابون

۲) $NaHCO_3$ ـ یک ـ صابون

۳) Na_2CO_3 ـ دو ـ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی

۴) $NaHCO_3$ ـ دو ـ پاک‌کنندهٔ غیرصابونی

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

نام مادهٔ $NaHCO_3$، سدیم هیدروژن کربنات یا همان جوش‌شیرین است. واکنش این ماده با اسید معده به صورت زیر است:

$$NaHCO_3(aq) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + \underbrace{CO_2(g) + H_2O(l)}_{H_2CO_3}$$

مشفقه که یک مول جوش‌شیرین، یک **مول اسید** معده را خنثی می‌کند.

با توجه به این‌که جوش‌شیرین یک ضداسید است، می‌توان گفت که محلول این ماده، خاصیت بازی دارد؛ به همین دلیل برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها، به آن‌ها جوش‌شیرین اضافه می‌کنند، زیرا این مادهٔ بازی می‌تواند با چربی‌ها واکنش داده و **صابون** تولید کند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۹ در دمای اتاق، ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدرویدیک اسید با $pH = ۳$ و ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول استیک اسید با $pH = ۳$ موجود است. کدام موارد برای این دو محلول، مشابه است؟

الف) سرعت اولیهٔ واکنش با فلز منیزیم

ب) حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$

ج) تغییر pH در اثر اضافه‌کردن مقدار معینی آب خالص

د) حجم گاز هیدروژن تولیدی در واکنش با مقدار کافی منیزیم

۱) الف و ب ۲) الف و ج

۳) ب و د ۴) الف، ب و د

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

موارد «الف» و «ب» برای دو محلول، مشابه هستند.

بررسی موارد:

الف) سرعت واکنش محلول اسیدها با فلز منیزیم، به $[H^+]$ موجود در محلول بستگی دارد. در این‌جا pH دو محلول و در نتیجه $[H^+]$ در آن‌ها یکسان است؛ از این‌رو سرعت اولیهٔ واکنش‌ها با فلز منیزیم یکسان است.

ب) با توجه به یکسان‌بودن pH دو محلول، $[H^+]$ در آن‌ها برابر است. از طرفی می‌دانیم که حاصل $[H^+][OH^-]$ در دمای اتاق، برای همهٔ محلول‌های آبی یکسان است؛ در نتیجه $[OH^-]$ دو محلول و در نتیجه حاصل $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ آن‌ها نیز برابر می‌باشد.

ج) هیدرویدیک اسید (HI) یک اسید قوی و استیک اسید $(CH_۳COOH)$ یک اسید ضعیف است؛ بنابراین مقدار تغییر pH دو محلول در اثر اضافه‌کردن مقدار مشخصی آب، یکسان نخواهد بود.

نکته اگر با اضافه‌کردن آب به یک محلول اسیدی، حجم محلول n برابر شود (از $V_۱$ به $V_۲$ برسد)، مقدار تغییر pH محلول از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

برای اسیدهای قوی: $|\Delta pH| = \log n = \log \frac{V_۲}{V_۱}$

برای اسیدهای ضعیف: $|\Delta pH| = \frac{۱}{۲} \log n = \frac{۱}{۲} \log \frac{V_۲}{V_۱}$

د) معادلهٔ کلی واکنش فلز منیزیم با اسیدها به صورت زیر است:

$$Mg + ۲HA \rightarrow MgA_۲ + H_۲$$

با توجه به کافی‌بودن مقدار فلز منیزیم، حجم نهایی گاز هیدروژن تولیدشده به تعداد مول اسید بستگی دارد.

تعداد مول اسید = غلظت مولی × حجم

حجم محلول‌های اسیدی یکسان است، پس باید غلظت مولی محلول‌ها را مقایسه کنیم. pH دو محلول برابر است، یعنی اسید ضعیف $CH_۳COOH$ توانسته است به اندازهٔ اسید قوی HI، H^+ تولید کند؛ پس حتماً غلظت اولیه آن بیشتر بوده است.

$M(CH_۳COOH) > M(HI) \Rightarrow$ حجم نهایی گاز هیدروژن تولیدشده در واکنش فلز منیزیم با محلول استیک اسید بیشتر است.

۸۰ با توجه به جدول زیر، حاصل $\frac{A\times C}{B\times D}$ و نسبت $[OH^-]$ در محلول ۱ به محلول ۳ در دمای اتاق، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

محلول	pH	$[H^+]$
۱	۱۲/۳	A
۲	۰	D
۳	۲/۱۵	C
۴	B	$۱۰^{-۴}$

۱) $۳/۵\times۱۰^{-۱۶}$, $۳/۵\times۱۰^{۹}$
۲) $۸/۷۵\times۱۰^{-۱۵}$, $۱/۴\times۱۰^{۱۰}$
۳) $۳/۵\times۱۰^{-۱۵}$, $۳/۵\times۱۰^{۹}$
۴) $۸/۷۵\times۱۰^{-۱۶}$, $۱/۴\times۱۰^{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$A\times C=?\begin{cases}A:[H^+]=۱۰^{-pH}=۱۰^{-۱۲/۳}=۱۰^{-۱۳}\times\underbrace{۱۰^{۰/۷}}_{۵}=۵\times۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}\\ C:[H^+]=۱۰^{-۲/۱۵}=۱۰^{-۳}\times\underbrace{۱۰^{۰/۸۵}}_{۷}=۷\times۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵\times۱۰^{-۱۳}\times۷\times۱۰^{-۳}=۳۵\times۱۰^{-۱۶}$$

$$B\times D\begin{cases}B:pH=-\log۱۰^{-۴}=۴\\ D:[H^+]=۱۰^{۰}=۱\end{cases}\Rightarrow ۴\times۱=۴$$

$$\frac{A\times C}{B\times D}=\frac{۳۵\times۱۰^{-۱۶}}{۴}=۸/۷۵\times۱۰^{-۱۶}$$

برای محاسبهٔ غلظت یون هیدروکسید در محلول‌های ۱ و ۳ با توجه به رابطهٔ $[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}$، می‌توان نوشت:

ردیف ۱: $[H^+]=۵\times۱۰^{-۱۳}\Rightarrow[OH^-]=۲\times۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$

ردیف ۳: $[H^+]=۷\times۱۰^{-۳}\Rightarrow[OH^-]=\frac{۱}{۷}\times۱۰^{-۱۱}\ mol.L^{-۱}$

$$\frac{[OH^-]_{\text{ردیف ۱}}}{[OH^-]_{\text{ردیف ۳}}}=\frac{۲\times۱۰^{-۲}}{\frac{۱}{۷}\times۱۰^{-۱۱}}=۱/۴\times۱۰^{۱۰}$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

کتاب درسی

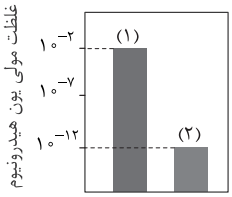
شیمی‌دان‌ها کمیت pH را با تابع لگاریتم به صورت زیر بیان می‌کنند:

$$pH=-\log[H^+]$$

با توجه به این رابطه، جدول زیر را کامل کنید. (شیمی (۳) - پیوند با ریاضی صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی)

خاصیت محلول	pH	$[H^+]$
.....	.....	۳×۱۰^{-۹}
.....	۴	.....
.....	.....	$۱/۸\times۱۰^{-۲}$

۸۱ **اگر در دمای اتاق، مقداری لیتیم اکسید به آب اضافه شود، کدام نمودار می‌تواند مربوط به غلظت مولی یون هیدرونیوم در این محلول باشد و براساس نمودار، pH این محلول با pH محلول چند گرم بر لیتر باریم هیدروکسید برابر است؟**
$(H=1, O=16, Ba=137 : g.mol^{-1})$



۱) نمودار (۱) ـ ۰/۸۵۵
۲) نمودار (۱) ـ ۱/۷۱
۳) نمودار (۲) ـ ۰/۸۵۵
۴) نمودار (۲) ـ ۱/۷۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

لیتیم اکسید (Li_2O) خاصیت بازی دارد و در محلول آن، $[H^+]$ کم‌تر از 10^{-7} مولار است؛ بنابراین نمودار (۲) درست است.

$[H^+]=10^{-12}\,mol.L^{-1}$

برای یکسان‌بودن pH محلول لیتیم اکسید با pH محلول باریم هیدروکسید، $[OH^-]$ در آن‌ها باید برابر باشد:

در محلول Li_2O: $[H^+][OH^-]=10^{-14} \Rightarrow [OH^-]=\frac{10^{-14}}{10^{-12}}=10^{-2}\ mol.L^{-1}$

$\Rightarrow$ در محلول $Ba(OH)_2$ $[OH^-]=10^{-2}\ mol.L^{-1}$

باریم هیدروکسید یک باز قوی دوظرفیتی است:

$$Ba(OH)_2 \rightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$$

$$M(Ba(OH)_2)=\frac{[OH^-]}{2}=\frac{10^{-2}}{2}=5\times10^{-3}\ mol.L^{-1}$$

حالا غلظت مول بر لیتر را به کمک جرم مولی، به غلظت گرم بر لیتر تبدیل می‌کنیم:

$$5\times10^{-3}\ \frac{mol\ Ba(OH)_2}{L}\times\frac{171\ g\ Ba(OH)_2}{1\ mol\ Ba(OH)_2}=0/855\ g.L^{-1}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۲ **۱۵ گرم محلول ۴۰ درصد جرمی استیک اسید را به مقداری آب خالص اضافه می‌کنیم، سپس به محلول حاصل مقداری آب خالص می‌افزاییم تا حجم نهایی محلول به ۵ لیتر برسد. اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلول به‌دست‌آمده، ۴×۱۰^{-۴} مول بر لیتر باشد، به ترتیب از راست به چپ، درصد یونش استیک اسید در محلول نهایی چه‌قدر است و pH این محلول چند واحد بیشتر از pH محلول ۰/۰۳ مولار نیتریک اسید است؟**

۱) ۲ ـ ۱/۹
۲) ۴ ـ ۲/۳
۳) ۲ ـ ۲/۳
۴) ۴ ـ ۱/۹

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: غلظت مولی محلول استیک اسید ($CH_۳COOH$) حاصل را حساب می‌کنیم:

$$\text{مول استیک اسید: } ۱۵\ g \text{ محلول} \times \frac{۴۰\ g\ CH_۳COOH}{۱۰۰\ g \text{ محلول}} \times \frac{۱\ mol\ CH_۳COOH}{۶۰\ g\ CH_۳COOH} = ۰/۱\ mol\ CH_۳COOH$$

$$\text{غلظت مولی محلول نهایی استیک اسید} = \frac{\text{مول استیک اسید}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۱}{۵} = ۰/۰۲\ mol.L^{-۱}$$

گام دوم: درصد یونش محلول استیک اسید را در محلول نهایی آن به دست می‌آوریم:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} = \frac{۴\times۱۰^{-۴}}{۰/۰۲} = ۰/۰۲ \Rightarrow ٪\alpha = ۰/۰۲\times۱۰۰ = ۲$$

گام سوم: pH محلول نیتریک اسید و pH محلول استیک اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{محلول } HNO_۳: [H^+] = [HNO_۳] = ۰/۰۳ \Rightarrow pH = -\log(۰/۰۳) = ۲ - \log ۳ = ۱/۵$$

$$\text{محلول } CH_۳COOH: [H^+] = ۴\times۱۰^{-۴} \Rightarrow pH = -\log(۴\times۱۰^{-۴}) = ۴ - \log ۴ = ۴ - ۲\log ۲ = ۳/۴$$

بنابراین می‌توان گفت که pH محلول استیک اسید، $۳/۴ - ۱/۵ = ۱/۹$ واحد از محلول نیتریک اسید بیشتر است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۳ کدام موارد زیر در ارتباط با محلولی که به عنوان شیشه‌پاک‌کن از آن استفاده می‌شود، نادرست است؟

محلول آمونیاک

الف) اختلاف pH این محلول با آب خالص، از اختلاف pH محلول لوله‌بازکن با آب خالص بیشتر است.

ب) حل‌شوندهٔ آن، با تشکیل پیوند هیدروژنی به خوبی در آب حل می‌شود، اما محلول آن یک الکترولیت ضعیف به شمار می‌آید.

پ) در این محلول، شمار مولکول‌های یونیده‌نشده، کم‌تر از شمار مولکول‌های یونیده‌شده است.

ت) در شرایط یکسان، نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به یون هیدرونیوم در این محلول، کم‌تر از همین نسبت در محلول لوله‌بازکن است.

۱) الف و ب
۲) الف و پ
۳) ب و ت
۴) پ و ت

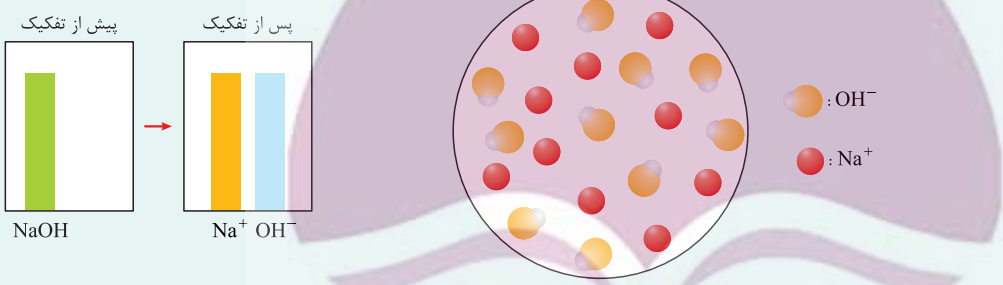
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) در محلول بازها، $[H^+] < [OH^-]$ و pH محلول آن‌ها در دمای اتاق در گسترهٔ ۷ تا ۱۴ $(7 < pH \leq 14)$ است. هر چه غلظت یون هیدروکسید در محلول بازها بیشتر باشد، pH آن‌ها به ۱۴ نزدیک‌تر است.

۲) سود سوزآور $(NaOH)$ و پتاس سوزآور (KOH) از جمله بازهای بسیار قوی هستند، به طوری که مواد خورنده به شمار می‌آیند. از NaOH به عنوان لوله بازکن استفاده می‌شود.

۳) محلول بازهای قوی فقط شامل یون‌های آبپوشیده است؛ بنابراین نمودار ستونی و نمای ذره‌ای محلول آن‌ها مانند NaOH را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

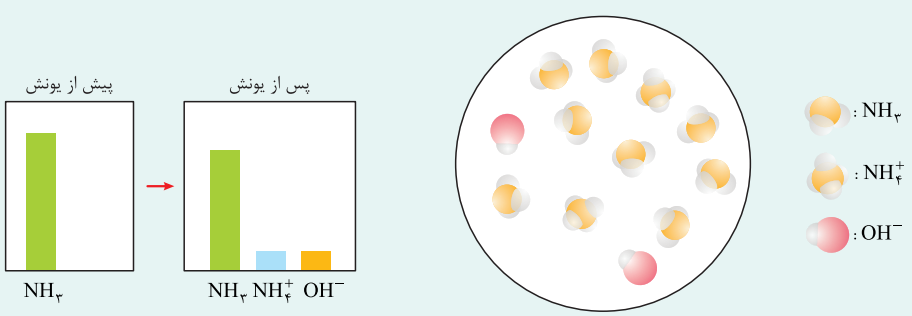


$$NaOH(s) \xrightarrow{\text{در آب}} Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

۴) آمونیاک، معروف‌ترین باز ضعیف است که بیشتر به صورت مولکولی در آب حل شده و تنها تعداد کمی از مولکول‌های آن مطابق معادلهٔ زیر یونش می‌یابند:

$$NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

با توجه به این‌که در محلول آمونیاک، هم مولکول‌های یونیده‌نشده و هم یون‌های آبپوشیده وجود دارد، نمودار ستونی و نمای ذره‌ای محلول آن را می‌توان به صورت زیر نشان داد، دقت کنید که در محلول این ماده، غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده (NH_3) بسیار بیشتر از یون‌ها (NH_4^+ و OH^-) است:



بدانید و آگاه باشید که از محلول آمونیاک به عنوان شیشه پاک‌کن استفاده می‌شود.

۵) محلول بازهای قوی، الکترولیت قوی بوده و در صورتی که غلظت آن‌ها در آب کافی باشد، محلول حاصل دارای رسانایی الکتریکی بالا بوده و اگر یک مدار الکتریکی حاوی یک لامپ را در چنین محلولی قرار دهیم، لامپ کاملاً روشن می‌شود، در حالی که بازهای ضعیف، یک الکترولیت ضعیف بوده و اگر مدار الکتریکی حاوی یک لامپ را در محلول آن‌ها (با غلظت یکسان نسبت به بازهای قوی) قرار دهیم، لامپ به صورت نیمه‌روشن درمی‌آید.

رسانایی الکتریکی در غلظت یکسان : محلول بازهای قوی (غلظت یون‌ها بیشتر) > محلول بازهای ضعیف (غلظت یون‌ها کمتر)



لامپ نیمه‌روشن (باز ضعیف)



لامپ کاملاً روشن (باز قوی)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «پ» نادرست‌اند.

محلول شیشه پاک‌کن، محلول آمونیاک (NH_3) در آب است:

$$NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) مقایسهٔ pH آب خالص، محلول لوله بازکن و محلول شیشه پاک‌کن به صورت زیر است:

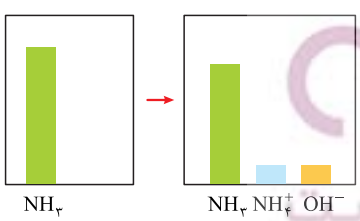
pH: محلول لوله بازکن > محلول شیشه پاک‌کن > آب خالص

بنابراین می‌توان گفت که اختلاف pH محلول لوله‌بازکن و آب خالص، بیشتر از اختلاف pH محلول شیشه پاک‌کن و آب خالص می‌باشد.

ب) آمونیاک (NH_3) به علت اتم‌های H متصل به اتم N ، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی میان مولکول‌های خود و هم‌چنین با مولکول‌های آب را دارد؛ بنابراین انحلال‌پذیری خوبی در آب دارد. آمونیاک نوعی باز ضعیف است و یک الکترولیت ضعیف به شمار می‌رود.

پ) آمونیاک بیشتر به صورت مولکولی در آب حل می‌شود؛ در نتیجه می‌توان گفت که در محلول آبی آن، شمار مولکول‌های یونیده‌نشده به مراتب بیشتر از شمار مولکول‌های یونیده‌شده است:

نمودار ستونی محلول رو می‌شه این‌جوری نشون داد:



ت) در غلظت یکسان، در محلول لوله بازکن (محلول سدیم هیدروکسید ($NaOH$))، $[OH^-]$ بیشتر و $[H^+]$ کم‌تر از محلول شیشه پاک‌کن (محلول آمونیاک (NH_3)) است؛ بنابراین نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ در محلول لوله بازکن بیشتر از محلول شیشه پاک‌کن می‌باشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۴ کدام مورد نادرست است؟

۱) پدیدهٔ طبیعی آذرخش که از ماهیت الکتریکی ماده سرچشمه می‌گیرد، سبب شناسایی واکنش‌هایی شد که مبنای تولید انرژی الکتریکی هستند.

۲) دستیابی به مواد مناسب و تأمین انرژی، دو رکن اساسی تحقق فناوری‌هایی است که موجب آسایش و رفاه می‌شوند.

۳) تولید مواد در فرایندهایی مانند برقکافت و سلول سوختی، از قلمروهای الکتروشیمی محسوب می‌شود.

۴) تأمین انرژی الکتریکی برای تنظیم‌کننده‌های ضربان قلب انسان، به باتری وابسته است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

سلول‌های سوختی، برای تأمین انرژی به کار می‌روند.

تأمین انرژی ← باتری‌ها و سلول‌های سوختی

تولید مواد ← برقکافت و آبکاری

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۵ به یک میلی‌لیتر محلول ۲۰ درصد جرمی اسید قوی HA (با جرم مولی $130\ g.mol^{-1}$)، آب اضافه می‌شود تا به حجم یک لیتر برسد. pH محلول جدید کدام است و ۵۰ میلی‌لیتر از آن با چند میلی‌گرم کلسیم هیدروکسید به طور کامل خنثی می‌شود؟ (چگالی محلول اولیهٔ اسید، $1/3\ g.mL^{-1}$ است، $Ca=40\ ,\ O=16\ ,\ H=1 : g.mol^{-1}$)

۱) ۳/۷ ـ ۱/۵
۲) ۷/۴ ـ ۲/۷
۳) ۷/۴ ـ ۱/۵
۴) ۳/۷ ـ ۲/۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: محاسبهٔ غلظت اولیه و نهایی محلول:

$$\text{غلظت مولی اولیه} = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{10\times 20\times \frac{1}{100}\times 1/3}{130} = 2\ mol.L^{-1}$$

حجم محلول با افزودن آب، از ۱ mL به ۱۰۰۰ mL رسیده است:

$$\underbrace{M_1V_1}_{\text{غلیظ}} = \underbrace{M_2V_2}_{\text{رقیق}} \Rightarrow 2\times 1 = M_2\times 1000 \Rightarrow M_2 = 0/002\ mol.L^{-1}$$

گام دوم: محاسبهٔ pH نهایی محلول: HA اسید قوی است و $[H^+]$ در محلول آن با غلظت اولیه برابر است:

$$[H^+] = 2\times 10^{-3} \Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log(2\times 10^{-3}) = 3 - \underbrace{\log 2}_{0/3} = 2/7$$

گام سوم: محاسبهٔ جرم کلسیم هیدروکسید در واکنش خنثی‌شدن:

$$Ca(OH)_2 + 2HA \rightarrow CaA_2 + 2H_2O$$

$$\frac{50}{1000}\ L\ HA(aq)\times\frac{0/002\ mol\ HA}{1\ L\ HA(aq)}\times\frac{1\ mol\ Ca(OH)_2}{2\ mol\ HA}\times\frac{74\ g\ Ca(OH)_2}{1\ mol\ Ca(OH)_2}\times\frac{1000\ mg}{1\ g} = 3/7\ mg\ Ca(OH)_2$$

یه‌جور دیگه

$$\underbrace{n_aM_aV_a}_{HA} = \underbrace{n_b}_{\text{مول}}\underbrace{M_bV_b}_{Ca(OH)_2} \xrightarrow{\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}}} 1\times 0/002\times\frac{50}{1000} = 2\times\frac{x}{74} \Rightarrow x = 3/7\times 10^{-3}\ g = 3/7\ mg$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۶ در یک داروی ضداسید، نسبت مولی آلومینیم هیدروکسید به منیزیم هیدروکسید برابر $\frac{۱}{۳}$ است. نمونه‌ای از این دارو که دارای ۵۸۰ میلی‌گرم منیزیم هیدروکسید است، چند میلی‌لیتر شیرهٔ معده با $pH = ۱/۵$ را به طور کامل خنثی می‌کند؟ $(H = ۱ , O = ۱۶ , Mg = ۲۴ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۲۰۰۰

۳) ۳۰۰۰ ۴) ۴۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به واکنش‌های زیر، هر مول منیزیم هیدروکسید و هر مول آلومینیم هیدروکسید، به ترتیب ۲ و ۳ مول شیرهٔ معده را خنثی می‌کنند.

$$Mg(OH)_۲ + ۲HCl \rightarrow MgCl_۲ + ۲H_۲O$$
$$Al(OH)_۳ + ۳HCl \rightarrow AlCl_۳ + ۳H_۲O$$

حالا به کمک جرم $Mg(OH)_۲$، باید مول دو ماده را به دست آوریم:

$$Mg(OH)_۲ \text{ مول} = ۵۸۰ \times ۱۰^{-۳}\,g \times \frac{۱\,mol}{۵۸\,g} = ۱۰^{-۲}\,mol$$

$$Al(OH)_۳ \text{ مول} = \frac{۱}{۳}(Mg(OH)_۲ \text{ مول}) = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۲}\,mol$$

$$HCl \text{ خنثی شده مول} = \underbrace{(۲ \times ۱۰^{-۲})}_{\text{توسط } Mg(OH)_۲} + \underbrace{(۳ \times \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۲})}_{\text{توسط } Al(OH)_۳} = ۳ \times ۱۰^{-۲}\,mol$$

حالا باید مول HCl را به حجم شیرهٔ معده تبدیل کنیم:

$$M(HCl) = [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{-۲} \times \underbrace{۱۰^{۰/۵}}_{۳} = ۳ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{مول}}{\text{حجم}} \Rightarrow \text{حجم} = \frac{۳ \times ۱۰^{-۲}\,mol}{۳ \times ۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}} = ۱\,L = ۱۰۰۰\,mL$$

کنکور ۵۰ میلی‌لیتر از یک شربت ضداسید، دارای ۱/۱۶ میلی‌گرم منیزیم هیدروکسید و ۳/۹۰ میلی‌گرم آلومینیم هیدروکسید است. این ضداسید، چند میلی‌لیتر شیرهٔ معده با $pH = ۱/۷$ را خنثی می‌کند؟ *(سؤال ۲۳۷ کنکور تجربی ۱۴۰۱)*

$(H = ۱ , O = ۱۶ , Mg = ۲۴ , Al = ۲۷ : g.mol^{-۱})$

$Mg(OH)_۲(s) + HCl(aq) \rightarrow MgCl_۲(aq) + H_۲O(l)$

$Al(OH)_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow AlCH_۳(aq) + H_۲O(l)$

(معادلهٔ واکنش‌ها موازنه شوند.)

۱) ۷ ۲) ۹/۵

۳) ۱۴ ۴) ۱۷/۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۷ درست یا نادرست بودن عبارت‌های زیر به ترتیب کدام است؟

اکسیژن

- طلا تنها فلزی است که با مولکول‌های دومین گاز فراوان هواکره واکنش نمی‌دهد.
- در واکنش $_{47}Ag$ با اکسیژن، عامل کاهنده با از دست دادن الکترون به آرایش گاز نجیب نمی‌رسد.
- در واکنش فلز آهن با محلول مس (II) نیترات، پایداری واکنش‌دهنده‌ها از فراورده‌ها بیشتر است.
- اگر فلز آهن کاهنده‌تر از فلز Y باشد، می‌توان محلولی از آلومینیم نیترات را در ظرفی از جنس فلز Y نگه‌داری کرد.

۱) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

۲) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۳) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ نادرست

۴) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

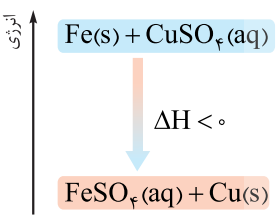
پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول و سوم، نادرست و عبارت‌های دوم و چهارم، درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- دومین گاز فراوان هواکره، اکسیژن است. علاوه بر طلا، فلزهای دیگری مانند پلاتین نیز با اکسیژن واکنش نمی‌دهند.
- در واکنش فلزها با گاز اکسیژن، فلز الکترون از دست داده و کاهنده است. یون $_{47}Ag^{+}$، دارای ۴۶ الکترون می‌باشد و آرایش الکترونی آن مانند هیچ گاز نجیبی نیست.
- واکنش فلز آهن با محلول مس (II) سولفات، گرماده است و در آن فراورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها هستند.



- با توجه به اطلاعات داده‌شده، قدرت کاهندگی فلز Y از فلز آلومینیم کم‌تر است؛ بنابراین واکنش:

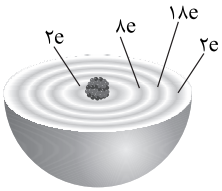
$$Y + Al(NO_3)_2 \rightarrow$$

به طور طبیعی انجام نمی‌شود و می‌توان محلول آلومینیم نیترات را در ظرفی از جنس فلز Y نگه‌داری کرد.

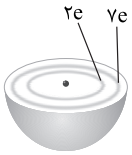
قدرت کاهندگی: $Al > Fe > Y$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۸ **با توجه به شکل‌های داده‌شده، درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**



(A)



(B)

۱) عنصر B اکسنده‌ای قوی با واکنش‌پذیری زیاد است.

۲) یون A^{2+} دارای ۱۸ الکترون با $n=3$ است.

۳) در واکنش میان عنصرهای A و B، گونهٔ کاهنده نسبت به گونهٔ اکسنده، شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

۴) معادلهٔ تبدیل اتم B به یون پایدار به صورت $B+3e^- \rightarrow B^{3-}$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۴) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

عدد اتمی A $= 2+8+18+2=30 \Rightarrow {}_{30}Zn$

عدد اتمی B $= 2+7=9 \Rightarrow {}_{9}F$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): فلوئور، نافلزی فعال و واکنش‌پذیر است و اکسنده‌ترین عنصر در جدول تناوبی محسوب می‌شود.

گزینهٔ (۲):

$${}_{30}A:[Ar]\,3d^{10}4s^2 \Rightarrow {}_{30}A^{2+}:[Ar]\,3d^{10}$$

لایهٔ سوم یون A^{2+} کاملاً پر و ۱۸ الکترونی است:

$$3s^2 3p^6 3d^{10}$$

گزینهٔ (۳): در واکنش بین فلز و نافلز، فلز الکترون از دست می‌دهد و کاهنده است، در حالی که نافلز الکترون گرفته و نقش اکسنده را ایفا می‌کند؛ پس در این‌جا، A کاهنده و B ، اکسنده است و با توجه به شکل‌ها معلومه که A ، شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد.

گزینهٔ (۴): فلوئور در گروه ۱۷ قرار دارد و با گرفتن یک الکترون به آنیون F^- تبدیل می‌شود:

$$B+e^- \rightarrow B^-$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۹ **رنگ آبی محلول مس (II) سولفات بعد از قراردادن تیغهٔ روی درون آن، به مرور بی‌رنگ می‌شود. کدام مورد دربارهٔ این واکنش نادرست است؟ ($Zn = 65 : g.mol^{-1}$ و $Cu = 64$، همهٔ مس تولیدشده بر روی تیغهٔ روی رسوب می‌کند.)**

۱) با انجام واکنش، دمای محلول افزایش می‌یابد.

۲) مجموع ضرایب استوکیومتری گونه‌ها در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ این واکنش، برابر ۴ است.

۳) مقایسهٔ قدرت اکسندگی گونه‌ها به صورت $Cu > Zn$ است.

۴) اگر در این واکنش ۰/۵ مول الکترون مبادله شده باشد، تغییر جرم تیغه برابر ۰/۲۵ گرم است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

برای فلزهای مس و روی، قدرت کاهندگی معنی دارد و نه اکسندگی! زیرا فلزها نمی‌توانند الکترون بگیرند و کاهش یابند.

قدرت کاهندگی: $Zn > Cu \Rightarrow$ قدرت اکسندگی : $Zn^{2+} < Cu^{2+}$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واکنش مورد نظر گرماده است و با انجام آن، دمای محلول افزایش می‌یابد.

گزینهٔ (۲): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش را ببینید:

$$Zn(s) + CuSO_4(aq) \rightarrow ZnSO_4(aq) + Cu(s)$$

گزینهٔ (۴): با مبادلهٔ ۲ مول الکترون، ۱ مول Zn (۶۵ g)، مصرف و ۱ مول Cu (۶۴ g) تولید می‌شود و بر روی تیغه می‌نشیند؛ پس به‌ازای مبادلهٔ ۲ مول الکترون، جرم تیغه ۱ = ۶۴ − ۶۵ گرم کاهش می‌یابد:

$$\text{تغییر جرم} = 0/25\ g \quad 0/5\ mol\ e^- \times \frac{\text{تغییر جرم } 1\ g}{2\ mol\ e^-}$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۰ تیغه‌ای به جرم ۲۱ گرم از جنس فلز نیکل را درون محلول مس (II) سولفات قرار می‌دهیم. اگر $۲۱۶/۷۲\times۱۰^{۲۱}$ الکترون میان گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله شود و جرم تیغه به ۱۹/۰۲ گرم برسد، چند درصد از فلز تولیدشده روی تیغه رسوب کرده است؟ $(Cu=۶۴ , Ni=۵۹ : g.mol^{-1})$

$$Ni(s)+CuSO_۴(aq)\rightarrow NiSO_۴(aq)+Cu(s)$$

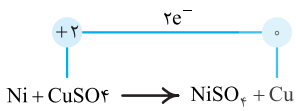
۱) ۵۰ ۲) ۶۰

۳) ۷۵ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به معادلهٔ واکنش، اگر ۲ مول الکترون مبادله شود، ۱ مول Ni (۵۹ g) مصرف و ۱ مول Cu (۶۴ g) تولید می‌شود که x درصد آن (یعنی ۰/۶۴ x گرم) بر روی تیغه قرار می‌گیرد؛ بنابراین با مبادلهٔ ۲ مول الکترون، جرم تیغه به اندازهٔ $(۰/۶۴x-۵۹)$ گرم کاهش می‌یابد. حالا به‌ازای مبادلهٔ $۲۱۶/۷۲\times۱۰^{۲۱}$ الکترون خواهیم داشت:



$$\text{کاهش جرم تیغه} = ۲۱-۱۹/۰۲ = ۱/۹۸\ g$$

$$\text{کاهش جرم} = -۱/۹۸\ g = \frac{۲۱۶/۷۲\times۱۰^{۲۱}\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\ e^-}\times\frac{۱\ mol\ e^-}{۲\ mol\ e^-}\times\frac{(-۵۹+۰/۶۴x)\ g}{}$$

$$۳۶(-۵۹+۰/۶۴x) = -۲\times۰/۶۴x \Rightarrow ۰/۶۴x = ۴۸ \Rightarrow x = ٪۷۵$$

یه‌جور دیگه

در مسائل مربوط به تغییر جرم تیغه، می‌توانیم از کسر تناسب به شکل زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد}}{\text{عدد آووگادرو}\times\text{ضریب}} = \ldots = \frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{(\text{جرم مولی فلز تیغه}\times\text{ضریب}) - (\frac{\text{درصد چسبیدن}}{۱۰۰}\times\text{جرم مولی فلز تولیدشده}\times\text{ضریب})}$$

$$Ni+CuSO_۴\rightarrow NiSO_۴+Cu \sim ۲e^-$$

$$\frac{۲۱۶/۷۲\times۱۰^{۲۱}}{\underbrace{۲\times۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}}_{۱\ e^-}} = \frac{-۱/۹۸}{(۱\times۶۴\times\frac{x}{۱۰۰})-(۱\times۵۹)} \Rightarrow x = ۷۵$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۱ **درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟**

۱) انرژی گرمایی مولکول‌های گازی، سبب توزیع آن‌ها در سرتاسر هواکره می‌شود.

۲) فشار هر گاز، ناشی از برخورد مولکول‌های سازندهٔ آن‌ها با یکدیگر است.

۳) با افزایش ارتفاع از سطح زمین، تعداد ذره‌ها در واحد حجم هوا کاهش می‌یابد.

۴) نخستین مرحله برای تهیهٔ هوای مایع، عبور هوا از صافی‌ها به منظور گرفتن گردوغبار آن است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ گزینهٔ (۲) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

فشار هر گاز، ناشی از برخورد ذره‌های سازندهٔ آن با دیوارهٔ ظرف است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۲ **اگر هوای مایع با دمای $-200\ ^\circ C$ را در دو مرحله تا دمای $-195\ ^\circ C$ و $-185\ ^\circ C$ گرم کنیم، به ترتیب گازهای ..... و ..... از مخلوط خارج می‌شود.**

۱) نیتروژن ـ آرگون
۲) نیتروژن ـ اکسیژن
۳) هلیم ـ نیتروژن
۴) آرگون ـ اکسیژن

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته ترتیب نقطهٔ جوش چهار گاز هواکره که شما باید بدونین به صورت زیر است:

مقایسهٔ نقطهٔ جوش: $\underset{-269\ ^\circ C}{He} < \underset{-196\ ^\circ C}{N_2} < \underset{-186\ ^\circ C}{Ar} < \underset{-183\ ^\circ C}{O_2}$

پاسخ خیلی تشریحی اگر نمونه‌ای از هوای مایع با دمای $-200\ ^\circ C$ را وارد برج تقطیر کنیم. ترتیب جداشدن گازها *این‌طوری‌است*:

ترتیب جداشدن گازها: $\underset{(1)}{N_2} \rightarrow \underset{(2)}{Ar} \rightarrow \underset{(3)}{O_2}$

دقت کنید، دمای $-200\ ^\circ C$ بالاتر از نقطهٔ جوش هلیم ($-269\ ^\circ C$) می‌باشد، بنابراین در هوای مایع با دمای $-200\ ^\circ C$ *خبری از هلیم نیست!* (هر ماده‌ای بالاتر از نقطهٔ جوش خود به حالت گاز است؛ پس هلیم در دمای $-200\ ^\circ C$ هم‌چنان به حالت گاز باقی می‌ماند.) با رسیدن به دمای $-195\ ^\circ C$، نیتروژن و با رسیدن به دمای $-185\ ^\circ C$، آرگون از مخلوط جدا می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۳ کدام مورد درست است؟ ← آرگون

۱) گاز نجیبی که نام آن به معنای تنبل است، در هوای مایع با دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$ وجود ندارد.

۲) دومین گاز نجیب دستهٔ p جدول دوره‌ای، در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بالا تهیه می‌شود. ← آرگون

۳) درصد حجمی اکسیژن در لایهٔ دوم هواکره، بسیار کم‌تر از درصد حجمی آن در لایهٔ اول است.

۴) امروزه برای خنک‌کردن قطعات دستگاه‌های الکترونیکی از نیتروژن استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): آرگون (Ar) به معنی تنبل است. این ماده در هوای مایع با دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$ وجود دارد. *اون هلیمه که در هوای مایع با دمای $-۲۰۰\ ^\circ C$ وجود نداره!*

گزینهٔ (۲): به‌جز هلیم که متعلق به دستهٔ s است، سایر گازهای نجیب، جزء عنصرهای دستهٔ p جدول محسوب می‌شوند. اولین گاز نجیب دستهٔ p ، نئون ($_{۱۰}Ne$) و دومین گاز نجیب دستهٔ p، آرگون (Ar) است. گاز آرگون در پتروشیمی شیراز، از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بالا تهیه می‌شود.

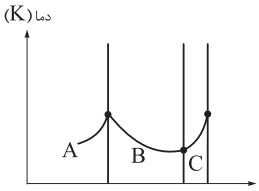
گزینهٔ (۳): درصد حجمی گاز اکسیژن در ۳ لایهٔ اول هواکره، یک مقدار ثابت و مشخص است و تغییری نمی‌کند. دقت کنید که هر چند درصد حجمی گاز اکسیژن ثابت است، اما به دلیل رقیق‌شدن هوا، با افزایش ارتفاع، مقدار و فشار گاز اکسیژن کاهش می‌یابد.

گزینهٔ (۴): برای خنک‌کردن قطعات دستگاه‌های الکترونیکی از هلیم استفاده می‌شود.



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۹۴ با توجه به شکل زیر که نمودار تقریبی «دما ـ فشار» در سه لایهٔ اول هواکره را نشان می‌دهد، کدام موارد از مطالب زیر در ارتباط با لایهٔ A درست است؟



الف) در ارتفاع ۵۰ تا ۸۰ کیلومتری از سطح زمین قرار گرفته و نوع گازهای موجود در این لایه، مشابه لایهٔ قبل از آن است.

ب) در بین لایه‌های هواکره، بخار آب تنها در لایهٔ A وجود دارد.

پ) گونه‌هایی مانند O^+ ، O ، He^+ و N_2^+ را می‌توان در آن مشاهده کرد.

ت) با افزایش ارتفاع در این لایه، دما همانند فشار گاز اکسیژن، کاهش می‌یابد.

۱) الف و ب
۲) الف و ت
۳) ب و پ
۴) پ و ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته

به طور خلاصه، روند تغییرات فشار و تغییرات دما در سه لایهٔ اول هواکره به صورت زیر است:

رابطهٔ فشار با ارتفاع در سه لایهٔ اول ← (همواره معکوس) ← با افزایش ارتفاع، فشار کم می‌شود.

رابطهٔ دما با ارتفاع در سه لایهٔ اول ← (بسته به نوع لایه، معکوس یا مستقیم) ← با افزایش ارتفاع در لایه‌های اول و سوم، دما کم می‌شود، اما در لایهٔ دوم زیاد می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

با توجه به توضیحات ارائه‌شده در نکتهٔ بالا، لایه‌های A، B و C نشان‌داده‌شده در نمودار به ترتیب لایه‌های سوم، دوم و اول هواکره هستند. دقت کنید که فشار هوا در لایهٔ اول بیشتر از لایهٔ سوم است؛ در نتیجه C ، لایهٔ اول و A، لایهٔ سوم هواکره محسوب می‌شود. دقت کنید که در هر لایه، از چپ به راست، ارتفاع لایه در حال کاهش است. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که لایهٔ A، همان لایهٔ سوم هواکره است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) لایهٔ سوم هواکره در ارتفاع km (۸۰ ـ ۵۰) از سطح زمین قرار دارد. در لایهٔ سوم هواکره همانند لایهٔ دوم (استراتوسفر)، گازهای N_2 ، O_2 ، CO_2 و O_2 یافت می‌شوند.

نکته

لایهٔ هواکره	محدودهٔ ارتفاع	روند تغییر فشار با افزایش ارتفاع	روند تغییر دما با افزایش ارتفاع	گونه‌های مهم
لایهٔ اول (تروپوسفر)	(۰ ـ ۱۱/۵)km	کاهش	کاهش	H_2O , O_3 , CO_2 , O_2 , N_2
لایهٔ دوم (استراتوسفر)	(۱۱/۵ ـ ۵۰)km	کاهش	افزایش	O_3 , CO_2 , O_2 , N_2
لایهٔ سوم	(۵۰ ـ ۸۰)km	کاهش	کاهش	O_3 , CO_2 , O_2 , N_2
لایهٔ چهارم	(۸۰ ـ ۵۰۰)km	کاهش	افزایش	H^+ , He^+ , O , O^+ , O_2^+ , N_2^+ , O_2 , N_2

ب) دقت کنید که بخار آب $(H_2O(g))$ در لایهٔ اول هواکره **(تروپوسفر)** وجود دارد.

پ) در لایهٔ **چهارم** هواکره (نه لایهٔ سوم!) علاوه بر گازهای N_2 ، O_2 و ...، یون‌های مثبت مانند N_2^+ ، O_2^+ ، O^+ ، He^+ و H^+ نیز وجود دارند.

ت) در لایهٔ سوم هواکره، با افزایش ارتفاع، دما و فشار گاز اکسیژن، هر دو کاهش می‌یابند.

۹۵ در کدام مورد، نسبت شمار الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول دوم، ۴ برابر این نسبت در مولکول اول است؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)

۱) CO , O_3

۲) HCN , CS_2

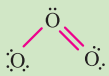
۳) SO_3 , SO_2

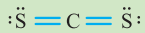
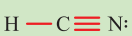
۴) CH_2O , PCl_3

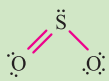
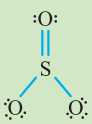
پاسخ: گزینهٔ ۲

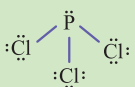
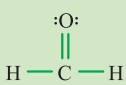
پاسخ خیلی تشریحی ✔

$$\frac{\text{الکترون‌های پیوندی}}{\text{جفت الکترون‌های ناپیوندی}}$$

(۱)
- O_3  $\frac{۶}{۶}=۱$
- CO  $\frac{۶}{۲}=۳$

(۲)
- CS_2  $\frac{۸}{۴}=۲$
- HCN  $\frac{۸}{۱}=۸$

(۳)
- SO_2  $\frac{۶}{۶}=۱$
- SO_3  $\frac{۸}{۸}=۱$

(۴)
- PCl_3  $\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$
- CH_2O  $\frac{۸}{۲}=۴$

کتاب درسی

ساختار لوویس هر یک از مولکول‌های زیر را رسم کنید. *(شیمی (۱) ـ با هم بیندیشیم صفحهٔ ۵۸ کتاب درسی)*

آ) SO_2

ب) CO

پ) PCl_3

ت) HCN

ث) CH_2O

ج) CS_2

۹۶ کدام مطلب نادرست است؟

۱) سوختن، واکنشی شیمیایی است که در آن، یک فلز یا نافلز با اکسیژن به سرعت واکنش داده و گرما و نور آزاد می‌کند.

۲) ساختار لوویس مولکول‌های کربن مونوکسید و نیتروژن با یکدیگر مشابه است.

۳) میل ترکیبی هموگلوبین خون با گاز CO بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است.

۴) آهک، اکسیدی فلزی است و افزودن آن به خاک کشاورزی، سبب افزایش بهره‌وری در کشاورزی می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

سوختن لزوماً مختص فلزها و نافلزها نیست.

سوختن، واکنشی شیمیایی است که در آن، یک ماده با اکسیژن به سرعت واکنش می‌دهد و بخشی از انرژی شیمیایی آن به صورت گرما و نور آزاد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): ببینید:

$:N \equiv N:$ و $:C \equiv O:$

گزینهٔ (۳): کاملاً درسته!

گزینهٔ (۴): آهک همان کلسیم اکسید (CaO) است که یک اکسید فلزی می‌باشد و افزودن آن به خاک باعث بهره‌وری بیشتر در کشاورزی می‌شود.

۹۷ اگر آرایش الکترونی یون حاصل از اتم کروم به زیرلایهٔ ..... ختم شود، فرمول شیمیایی ترکیب یونی حاصل از آن با آنیون .....، دارای ۵ یون است.

Cr^{2+} و Cr^{3+}

الف) $3d^4$ ـ فسفید

ب) $3d^3$ ـ نیترید

پ) $3d^4$ ـ اکسید

ت) $3d^3$ ـ سولفید

۱) الف ـ ب

۲) پ ـ ت

۳) الف ـ ت

۴) ب ـ پ

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کروم دارای دو یون پایدار Cr^{2+} و Cr^{3+} است.

$$_{24}Cr : [Ar]\,3d^5 4s^1 \begin{cases} \rightarrow Cr^{2+} : [Ar]\,3d^4 \\ \rightarrow Cr^{3+} : [Ar]\,3d^3 \end{cases}$$

آ) $Cr^{2+}P^{3-} \Rightarrow Cr_3P_2 \Rightarrow$ ۵ یون ✓

ب) $Cr^{3+}N^{3-} \Rightarrow CrN \Rightarrow$ ۲ یون

پ) $Cr^{2+}O^{2-} \Rightarrow CrO \Rightarrow$ ۲ یون

ت) $Cr^{3+}S^{2-} \Rightarrow Cr_2S_3 \Rightarrow$ ۵ یون ✓

۹۸ **با توجه به واکنش‌های شیمیایی زیر، کدام مورد نادرست است؟**

I) $\text{نقره سولفید} \xrightarrow{\Delta} \text{گوگرد} + \text{نقره}$

II) $H_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{کاتالیزگر}} H_2O(l)$

۱) واکنش (II) می‌تواند در حضور کاتالیزگر پلاتین ($Pt(s)$) انجام شود.

۲) فراوردهٔ واکنش (I)، یک ترکیب یونی دوتایی است که در اثر گرم‌شدن واکنش‌دهنده‌ها تولید می‌شود.

۳) مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش (II)، برابر با ۵ است.

۴) در واکنش (I)، طبق قانون پایستگی جرم، از واکنش کامل ۲ مول نقره با ۱ مول گوگرد، ۳ مول نقره سولفید تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔ معادلهٔ نمادی واکنش (I) به صورت زیر است:

$$2Ag(s) + S(s) \rightarrow Ag_2S(s)$$

بنابراین می‌توان گفت که از واکنش کامل ۲ مول نقره با ۱ مول گوگرد، ۱ مول نقره سولفید تولید می‌شود، *خواستون باشه که قانون پایستگی مول نداریم!*

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واکنش سوختن گاز هیدروژن (واکنش (II)) در مجاورت فلز پلاتین ($Pt(s)$) به عنوان کاتالیزگر انجام می‌شود.

گزینهٔ (۲): نماد $\xrightarrow{\Delta}$ در واکنش (۱)، به این معنی است که واکنش‌دهنده‌ها در این واکنش، بر اثر گرم‌شدن واکنش می‌دهند. فرمول شیمیایی نقره سولفید به صورت Ag_2S است و یک ترکیب یونی دوتایی محسوب می‌شود.

گزینهٔ (۳): معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش (II) *اینجوریاست:*

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$$

بنابراین مجموع ضرایب مواد در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ این واکنش، برابر با ۵ است.

۹۹ پس از موازنهٔ معادلهٔ واکنش‌های زیر، نسبت ضریب گاز اکسیژن به ضریب گاز نیتروژن کدام است؟

I) $(NH_4)_2Cr_2O_7(s) \rightarrow Cr_2O_3(s) + N_2(g) + H_2O(g)$

II) $NaCl(s) + SO_2(g) + O_2(g) + H_2O(g) \rightarrow Na_2SO_4(s) + HCl(g)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش‌های (I) و (II)، ضریب N_2 و O_2 برابر ۱ می‌باشد:

I) $(NH_4)_2Cr_2O_7 \rightarrow Cr_2O_3 + N_2 + 4H_2O$

II) $4NaCl + 2SO_2 + O_2 + 2H_2O \rightarrow 2Na_2SO_4 + 4HCl$

۱۰۰ کدام مورد، درست است؟

۱) $H_2O(s)$، $H_2O(l)$ و $H_2O(g)$، آلوتروپ‌های مختلف آب هستند.

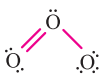
۲) پایداری مولکول اوزون بیشتر از مولکول اکسیژن است.

۳) نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برای هر دو آلوتروپ اکسیژن، یکسان است.

۴) آلوتروپ‌ها در خواص فیزیکی متفاوت، اما در خواص شیمیایی مشابه هستند.

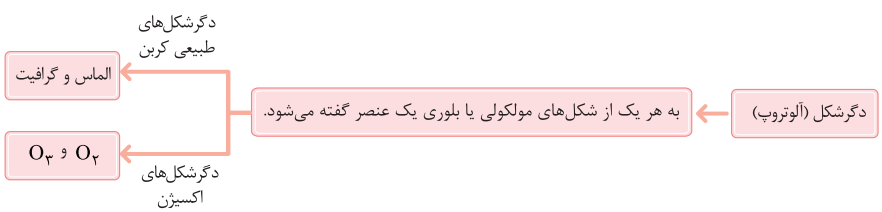
پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته مقایسه اکسیژن و اوزون:

آلوتروپ	ساختار لوویس	نقطهٔ جوش	مایع‌شدن	رنگ در حالت مایع	واکنش‌پذیری	پایداری	قطبیت	انحلال‌پذیری در آب
O_2	$\ddot{O}=\ddot{O}$	$-۱۸۳\ ^\circ C$ (کم‌تر)	سخت‌تر	آبی کم‌رنگ	کم‌تر	بیشتر	ناقطبی	کم‌تر
O_3	 (خمیده یا Vشکل)	$-۱۱۲\ ^\circ C$ (بیشتر)	آسان‌تر	آبی پررنگ	بیشتر (گندزدا)	کم‌تر	قطبی	بیشتر

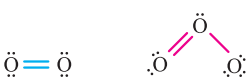
پاسخ خیلی تشریحی بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): واژهٔ آلوتروپ یا دگرشکل برای عنصرها به کار می‌رود و برای ترکیب‌ها، معنی ندارد.



گزینهٔ (۲): واکنش‌پذیری اوزون از اکسیژن، بیشتر و در نتیجه پایداری آن کم‌تر است.

گزینهٔ(۳): در هر دو آلوتروپ اکسیژن، نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



$\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

گزینهٔ (۴): آلوتروپ‌ها علاوه بر خواص شیمیایی، در خواص فیزیکی نیز متفاوتند؛ مثلاً نقطهٔ جوش و چگالی اکسیژن و اوزون، *کلی با هم فرق داره!*

۱۰۱ در معادلهٔ موازنه‌شدهٔ زیر، A کدام ماده است؟

$$۴CH_۳NH_۲(g)+۶O_۲(g)\rightarrow ۴CO_۲(g)+۴A(g)+۴H_۲O(l)$$

۱) گاز نیتروژن
۲) نیتروژن دی‌اکسید
۳) آمونیاک
۴) هیدرازین ($N_۲H_۴$)

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق قانون پایستگی جرم، شمار اتم‌های هر عنصر در دو سمت معادلهٔ واکنش باید با هم برابر باشند.

شمار اتم‌های هر عنصر در سمت راست معادله = شمار اتم‌های هر عنصر در سمت چپ معادله

اگر به معادله دقت کنید، می‌بینید که در هر دو طرف معادله، ۴ اتم کربن و ۱۲ اتم اکسیژن وجود دارد، یعنی عنصرهای C و O موازنه هستند و در ساختار مادهٔ A، این دو عنصر وجود ندارند.

حالا اگر موازنه را برای عنصرهای نیتروژن و هیدروژن بنویسیم، خواهیم داشت:

موازنهٔ N: $۴\times ۱=۴\times A$ شمار اتم‌های نیتروژن $\Rightarrow$ A = ۱ شمار اتم‌های نیتروژن

موازنهٔ H: $۴\times ۵=(۴\times A$ شمار اتم‌های هیدروژن$)+(۴\times ۲)$ $\Rightarrow$ A = ۳ شمار اتم‌های هیدروژن

بنابراین فرمول مادهٔ A، $NH_۳$ است که همان آمونیاک می‌باشد.

کنکور

در واکنش $۳Cu(s)+aHNO_۳(aq)\rightarrow ۳Cu(NO_۳)_۲(aq)+bA(g)+۴H_۲O(l)$، a و b به ترتیب از راست به چپ) برابر ..... و ..... و A گاز ..... است. *(سؤال ۲۱۲ کنکور ریاضی ۱۳۹۳ (خارج از کشور))*

۱) ۸ ـ ۲ ـ NO
۲) ۸ ـ ۲ ـ $NO_۲$
۳) ۱۰ ـ ۴ ـ NO
۴) ۱۰ ـ ۴ ـ $NO_۲$

۱۰۲ **کدام مورد درست است؟**

۱) کاهش مساحت برف در نیمکرهٔ شمالی و کاهش ارتفاع سطح آب‌های آزاد، نمونه‌هایی از نتایج افزایش گازهای گلخانه‌ای مانند CO_2 در هواکره است.

۲) برای حفظ گیاه یا میوه از آسیب‌های تغییر دما، گلخانه‌ها را با لایه‌ای از فلز می‌پوشانند.

۳) هر چه مقدار کربن دی‌اکسید واردشده به طبیعت زیادتر باشد، ردپای ایجادشده سنگین‌تر و اثر آن ماندگارتر خواهد بود.

۴) پرتوهای خورشیدی پس از برخورد به زمین، دوباره با طول موج‌های کوتاه‌تر به هواکره برمی‌گردند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با افزایش مقدار CO_2 در هوا، ارتفاع آب‌های آزاد افزایش می‌یابد.

افزایش میزان CO_2 موجود در هوا ← افزایش دمای کرهٔ زمین و افزایش سطح آب دریاها

افزایش میزان CO_2 موجود در هوا ← کاهش مساحت برف در نیم‌کرهٔ شمالی

گزینهٔ (۲): در گلخانه‌ها از لایهٔ پلاستیکی شفاف استفاده می‌شود و نه فلز!

گزینهٔ(۴): پرتوهای خورشیدی پس از برخورد به زمین، با انرژی کم‌تر و در نتیجه طول موج بلندتر به هوا بازمی‌گردند.

۱۰۳ **میزان برق مصرفی یک واحد تولیدی در یک سال، ۲۴۰٫۰۰۰ کیلووات ساعت است. اگر ۱۷۲۸ درخت تنومند نیاز باشد تا کربن دی‌اکسید واردشده به هواکره در اثر تولید این میزان برق پاک‌سازی شود، منبع تولید برق این واحد تولیدی کدام است؟**

منبع تولید برق	زغال‌سنگ	نفت خام	گاز طبیعی	انرژی خورشید
مقدار کربن دی‌اکسید تولیدشده به‌ازای هر کیلووات ساعت برق (kg)	۰/۹	۰/۷	۰/۳۶	۰/۰۵

۱) زغال‌سنگ
۲) نفت خام
۳) گاز طبیعی
۴) انرژی خورشیدی

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

هر درخت تنومند در یک سال حدود ۵۰ kg کربن دی‌اکسید مصرف می‌کند، اگر فرض کنیم در تولید هر کیلووات ساعت برق، x کیلوگرم CO_2 تولید شود، خواهیم داشت:

$$۲۴۰٫۰۰۰\ kWh \times \frac{x\ kg\ CO_2}{۱\ kWh} \times \frac{\text{درخت } ۱}{۵۰\ kg\ CO_2} = \text{درخت } ۱۷۲۸$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۷۲۸ \times \overset{۱}{\cancel{۵۰}}}{\underset{۴۸۰۰}{\cancel{۲۴۰٫۰۰۰}}} = ۰/۳۶ \Rightarrow \text{گاز طبیعی}$$

یه جور دیگه

$$\underbrace{۱۷۲۸ \times ۵۰}_{\substack{CO_2 \text{ مصرفی} \\ \text{توسط درختان}}} = \underbrace{۲۴۰٫۰۰۰ \times x}_{\substack{CO_2 \text{ تولیدی در تولید برق} \\ \text{به کمک منبع مورد نیاز}}} \Rightarrow x = ۰/۳۶ \frac{kg\ CO_2}{۱\ kWh} \Rightarrow \text{گاز طبیعی}$$

۱۰۴ کدام مطلب دربارهٔ سوخت سبز نادرست است؟

۱) از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغن به دست می‌آید.

۲) هیدروکربنی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد.

۳) اتانول و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از سوخت سبز هستند.

۴) زیست‌تخریب‌پذیر بوده و به وسیلهٔ جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔ سوخت سبز، هیدروکربن محسوب نمی‌شود! زیرا هیدروکربن‌ها، تنها از دو نوع عنصر کربن و هیدروژن تشکیل شده‌اند. سوخت سبز یک ترکیب آلی اکسیژن‌دار است.

سوخت سبز
- سوختی است که در ساختار خود علاوه برکربن و هیدروژن، اکسیژن نیز دارد.
- از پسماندهای گیاهی مانند شاخ و برگ گیاه سویا، نیشکر و دانه‌های روغنی به دست می‌آید.
- زیست‌تخریب‌پذیرند، از این‌رو به وسیلهٔ جانداران ذره‌بینی به مواد ساده‌تر تجزیه می‌شوند.
- اتانول (C_2H_5OH) و روغن‌های گیاهی نمونه‌هایی از این نوع سوخت‌ها هستند.

۱۰۵ **در هوای آلوده و در حضور نور خورشید، واکنشی رخ می‌دهد که در اثر آن، اوزون تروپوسفری تولید می‌شود. کدام مطلب دربارهٔ این واکنش نادرست است؟**

۱) در معادلهٔ این واکنش، مجموع ضرایب استوکیومتری اکسیدهای نیتروژن با مجموع ضرایب استوکیومتری آلوتروپ‌های اکسیژن برابر است.

۲) این واکنش در لایه‌ای از هواکره انجام می‌شود که تغییرات آب‌وهوایی زمین در آن رخ می‌دهد.

۳) بر اثر انجام این واکنش، اکسید قهوه‌ای‌رنگ نیتروژن تولید شده و موجب رنگ قهوه‌ای هوای آلودهٔ کلان‌شهرها می‌شود.

۴) فراورده‌های این واکنش، همانند واکنش‌دهنده‌ها، شامل یک گاز سه‌اتمی و یک گاز دواتمی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

اوزون علاوه بر لایهٔ استراتوسفر، در لایهٔ تروپوسفر نیز یافت می‌شود. این گاز در لایهٔ تروپوسفر **آلاینده‌ای سمی و خطرناک** است؛ به طوری که وجود آن در هوایی که تنفس می‌کنیم، سبب سوزش چشمان و آسیب دیدن ریه‌ها می‌شود.

اوزون تروپوسفری از واکنش گاز نیتروژن دی‌اکسید با گاز اکسیژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود:

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نور خورشید}} NO(g) + O_3(g)$$

هوای آلودهٔ کلان‌شهرها به دلیل وجود گاز نیتروژن دی‌اکسید (NO_2) به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود. *حالا این NO_2 از کجا میاد؟ از دو جا:*

۱) گاز نیتروژن به عنوان اصلی‌ترین جزء سازندهٔ هواکره، واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد و به طور معمول با گاز اکسیژن واکنش نمی‌دهد. اما بر اثر رعدوبرق و بالارفتن دما، با اکسیژن هوا واکنش داده و طی دو مرحله، به گاز NO_2 تبدیل می‌شود:

مرحلهٔ اول: $N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$

مرحلهٔ دوم: $2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$

۲) در هوای آلودهٔ شهرهای صنعتی و بزرگ، مقدار زیادی اکسیدهای نیتروژن وجود دارد. در واقع این گازها، واکنش گازهای نیتروژن و اکسیژن درون موتور خودرو و در دمای بالا به وجود می‌آیند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در هوای آلودهٔ حاوی گاز نیتروژن دی‌اکسید (NO_2) و در حضور نور خورشید، واکنش زیر رخ می‌دهد و مقداری گاز اوزون (O_3) تولید می‌شود:

$$NO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{\text{نور خورشید}} NO(g) + \underbrace{O_3(g)}_{\text{اوزون تروپوسفری}}$$

بر اثر انجام این واکنش، گاز نیتروژن مونوکسید (NO) تولید می‌شود؛ نه گاز نیتروژن دی‌اکسید (NO_2)! دقت کنید که گاز نیتروژن دی‌اکسید (NO_2) (برخلاف گاز نیتروژن مونوکسید (NO)) به رنگ قهوه‌ای است؛ به همین دلیل هوای آلودهٔ کلان‌شهرها اغلب به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$۲ = ۱ + ۱ =$ مجموع ضرایب آلوتروپ‌های اکسیژن (O_3, O_2) و $۲ = ۱ + ۱ =$ مجموع ضرایب اکسیدهای نیتروژن (NO, NO_2)

گزینهٔ (۲): لایهٔ تروپوسفر، نزدیک لایهٔ هواکره به سطح زمین بوده و تغییرات آب و هوایی زمین، در این لایه رخ می‌دهد.

گزینهٔ (۴): واکنش‌دهنده‌های این واکنش، گاز سه‌اتمی O_3 و گاز دواتمی NO و فراورده‌های آن، گاز سه‌اتمی NO_2 و گاز دواتمی O_2 هستند.