

	مرحله ۱: آزمون میان نوبت اول: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۸/۱۸
	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	تعداد صفحه: ۲
ردیف	سؤالات (پاسخ بزرگ دارد). - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.		
۱	درستی یا نادرستی هر کدام از عبارتهای زیر را مشخص کنید. (نیازی به ارائه دلیل نیست) الف) اگر عدد k برابر با ۲ برابر ضرب دو عدد متوالی باشد عدد $2k + 1$ مربع کامل است. ب) در روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها اگر فرض به دو جزء افزاز شود از هم ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ استفاده می کنیم. پ) اگر $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ آن گاه $[m^5, (m^3, m^2)] = m^5$. ت) اگر $[a, b] = c$ آن گاه $a m, b m \Rightarrow m \leq c$ $\forall m > 0$.		
۲	جای خالی را با عبارتهای مناسب تکمیل کنید. الف) گزاره «اگر n اول باشد آن گاه $3n + 1$ اول است» دارای مثال نقض در بین اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است. ب) دو عدد اول متمایز همواره نسبت به هم هستند. پ) باقی مانده تقسیم عدد $200 - 11$ برابر است. ت) ب.م.م دو عدد زوج متوالی همواره برابر است.		
۳	در هر سؤال گزینه درست را انتخاب کنید. (نیازی به نوشتن راه حل نیست) الف) α و β دو عدد گنگ غیرقرینه هستند ولی $\alpha + \beta$ گویا است. دو عدد $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ و $2\alpha - \beta$ به ترتیب چگونه هستند؟ (۱) گنگ - گنگ (۲) گنگ - ممکن است گویا یا گنگ باشد (۳) گویا - گنگ (۴) ممکن است گنگ یا گویا باشد - گنگ ب) روی تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ پ) کدام یک از ترکیبهای زیر درست است؟ (۱) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۲) $a + 2b$ فرد است $\Leftrightarrow 3a + b$ فرد است. (۳) n^2 مضرب ۴ است $\Leftrightarrow n$ زوج است. (۴) ab زوج است $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ فرد است.		
۴	$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{3, 4\}$ تعریف شده اند. با ذکر نام روش استدلال، نشان دهید اگر $n \in S$ و عدد $\frac{n^2(n-1)^2}{9}$ طبیعی و زوج باشد آن گاه $n \in A$.		
۵	با استفاده از برهان خلف ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آن گاه $3n + 1$ فرد است.»		
۶	نشان دهید اگر n عددی طبیعی و $a b$ آن گاه $a b^n$.		
۷	ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی a و b رابطه زیر درست است. $2a^2 + b^2 - 4a + 4b + 6 \geq 0$.		
۸	عدد $11k + 3$ بر a بخش پذیر و عدد a عدد $4 - 3k$ را عاد می کند. همه مقادیر ممکن برای عدد طبیعی a را به دست آورید.		

	مرحله ۱: آزمون میان نوبت اول: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۸/۱۸
	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	تعداد صفحه: ۲
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد). - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.		
۹	نشان دهید اگر $2k - 1 \mid 3$ آن گاه $4k^2 + 2k + 7 \mid 9$.		
۱۰	باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۷ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است. باقی مانده تقسیم عدد $2m - n^2$ را بر ۷ به دست آورید.		
۱۱	باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۲ و ۵ است. باقی مانده تقسیم عدد a بر ۲۱ را به دست آورید.		
۱۲	اگر $b = 4k + 1$ و $b \mid 20! + a$ ، باقی مانده تقسیم عدد $3 + 2b^2 + a^2$ بر ۸ را به دست آورید. (ارائه راه حل الزامی است)		
۱۳	الف) بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $3n - 7$ و $n + 2$ را به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n به دست آورید. ب) مشخص کنید به ازای کدام n ها، ب.م.م بزرگ ترین عدد ممکن خواهد بود.		
۱۴	a عددی صحیح است. نشان دهید همواره یکی از اعداد $a - 1$ و $a + 6$ و $2a + 2$ بر ۳ بخش پذیر است.		
۱۵	نشان دهید اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر n بخش پذیر باشند باقی مانده نیز بر n بخش پذیر است.		
	موفق باشید		
	جمع نمره		
	۲۰		



ریاضیات گسسته

درستی یا نادرستی هر کدام از عبارتهای زیر را مشخص کنید. (نیازی به ارائه دلیل نیست) (۱ نمره)

- (الف) اگر عدد k برابر با ۲ برابر ضرب دو عدد متوالی باشد عدد $2k + 1$ مربع کامل است.
 (ب) در روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها اگر فرض به دو جزء افزاز شود از هم‌ارزی
 $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ استفاده می‌کنیم.
 (پ) اگر $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ آن‌گاه $[m^5, (m^3, m^2)] = m^5$
 (ت) اگر $[a, b] = c$ آن‌گاه $m \leq c \Rightarrow a | m, b | m \Rightarrow \forall m > 0$

راهنمای تصحیح

(الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۳)

(ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۴)

(پ) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۷)

(ت) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۳)

درس Box

تعریف ب.م.م و ک.م.م

تعریف بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b : عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد a و b (که هر دو با هم صفر نیستند) می‌گوییم و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه:

(۱) d مقسوم‌علیه دو عدد باشد یعنی $a | d$ و $b | d$.

(۲) اگر m مقسوم‌علیه مثبت دیگری از دو عدد باشد، یعنی $a | m$ و $b | m$ آن‌گاه m از d کوچک‌تر یا مساوی با آن باشد، یعنی $m \leq d$.

$\forall m > 0; a | m, b | m \Rightarrow m \leq d$ پس شد:

تعریف کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b : دو عدد ناصفر a و b را در نظر بگیرید. عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه:

(۱) عدد c مضرب هر دو عدد باشد یعنی $a | c$ و $b | c$.

(۲) اگر مضرب دیگری مثل m از دو عدد وجود داشته باشد، m بزرگ‌تر یا مساوی c باشد (یعنی c کوچک‌تر باشد) به زبان ریاضی:

$\forall m > 0; a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$

پاسخ خیلی تشریحی

الف) $k = 2n(n+1) \Rightarrow 2k+1 = 2(2n(n+1))+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$

(ب) در اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها، اگر فرض به دو جزء p و q افزاز شود، ثابت می‌کنیم از هر جزء می‌توانیم حکم (۲) را نتیجه بگیریم یعنی از هم‌ارزی گفته‌شده داریم استفاده می‌کنیم.

(پ) اگر $a | b$ آن‌گاه $(a, b) = a$ و $[a, b] = b$. چون $m^2 | m^3$ پس $m^2 = (m^2, m^3) = [m^2, m^3]$ از طرفی چون $m^5 | m^2$ آن‌گاه $[m^5, m^2] = m^5$. دقت کنید که چون m منفی هم می‌تواند باشد، گذاشتن قدرمطلق ضروری است.

(ت) اگر ک.م.م دو عدد a و b برابر c باشد، همه مضارب طبیعی دیگر a و b بزرگ‌تر یا مساوی c هستند (نه کوچک‌تر از آن) به زبان دیگر:

$\forall m > 0; a | m, b | m \Rightarrow c \leq m$

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. (۱ نمره)

الف) گزاره «اگر n اول باشد آن گاه $3n + 1$ اول است» دارای مثال نقض در بین اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است.

ب) دو عدد اول متمایز همواره نسبت به هم هستند.

پ) باقی مانده تقسیم عدد $200 - 11$ برابر است.

ت) ب.م.م دو عدد زوج متوالی همواره برابر است.

راهنمای تصحیح >> الف) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۳)

ب) اول (۰/۲۵) (صفحه ۱۳)

پ) ۹ (۰/۲۵) (صفحه ۱۴)

ت) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۱۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

الف) مثال نقض باید در فرض درست دربیاید ولی حکم را نقض کند، پس اعداد اول مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ که به ازای آن‌ها $3n + 1$ اول نباشد مثال نقض به حساب می‌آیند. اعداد اول مجموعه $2, 3, 5$ هستند:

$$n = 2 \Rightarrow 3(2) + 1 = 7 \text{ اول}$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 \Rightarrow 3(3) + 1 = 10 \text{ غیر اول} \\ n = 5 \Rightarrow 3(5) + 1 = 16 \text{ غیر اول} \end{array} \right\} \rightarrow \text{مثال نقض دارد}$$

ب) اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند داریم $(p, q) = 1$. دو عددی که ب.م.م آن‌ها برابر یک باشد را نسبت به هم اول می‌گوییم.

پ) باقی مانده تقسیم، نمی‌تواند منفی باشد، پس داریم:

$$-200 = 11 \times (-19) + 9 \quad \text{باقی مانده}$$

ت) فرض می‌کنیم $d = (2n, 2n + 2)$ باشد پس داریم:

$$\begin{array}{l} d | 2n \\ d | 2n + 2 \end{array} \xrightarrow{-} d | 2 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \times \\ d = 2 \checkmark \end{cases}$$

چون هر دو عدد زوج هستند پس هر دو بر ۲ بخش پذیرند پس ب.م.م برابر ۲ است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳

در هر سؤال گزینه درست را انتخاب کنید. (نیازی به نوشتن راه حل نیست) (۷/۵ نمره)

الف) α و β دو عدد گنگ غیرقرینه هستند ولی $\alpha + \beta$ گویا است. دو عدد $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ و $2\alpha - \beta$ به ترتیب چگونه

هستند؟

- (۱) گنگ - گنگ
(۲) گنگ - ممکن است گویا یا گنگ باشد
(۳) گویا - گنگ
(۴) ممکن است گنگ یا گویا باشد - گنگ

ب) روی تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

پ) کدام یک از ترکیب‌های زیر درست است؟

- (۱) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow a < b$
(۲) $a + 2b$ فرد است $\Leftrightarrow 2a + b$ فرد است.
(۳) n^2 مضرب ۴ است $\Leftrightarrow n$ زوج است.
(۴) ab زوج است $\Leftrightarrow a^2 + b^2$ فرد است.

راهنمای تصحیح» الف) گزینه «۱» (۵/۰) (صفحه ۸)

ب) گزینه «۳» (۵/۰) (صفحه ۱۱)

پ) گزینه «۳» (۵/۰) (صفحه ۶)

در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب دو عدد α و β داریم:

α, β	جمع و تفریق (نوع اثبات)	ضرب
هر دو گویا	گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)
یکی گویا و یکی گنگ	گنگ (برهان خلف)	(اگر عدد گویا صفر باشد، برابر صفر ولی ضرب عدد گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)
هر دو گنگ	ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا

توجه! اثبات گنگ بودن اعداد با برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) انجام می‌شود. یعنی فرض می‌کنیم عبارت داده‌شده گنگ نباشد پس گویا بوده و بعد آن را به تناقض می‌رسانیم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) $\alpha - \beta$ گنگ است چون اگر آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\alpha - \beta = \underbrace{\alpha + \beta}_{\text{گویا}} - \underbrace{2\beta}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ}$$

از طرفی معکوس عدد گنگ، گنگ است پس $\frac{1}{\alpha - \beta}$ گنگ است. حالا داریم:

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = (\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \right) = \text{گنگ} \times \text{گویای ناصفر} = \text{گنگ}$$

$2\alpha - \beta$ هم گنگ است چون:

$$2\alpha - \beta = \underbrace{2(\alpha + \beta)}_{\text{گویا}} - \underbrace{3\beta}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ}$$

ب) یک کسر وقتی برابر با عددی صحیح می شود که صورت آن بر مخرج، بخش پذیر باشد؛ پس $x-1 \mid x+1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \mid x+1 \\ x-1 \mid x-1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{کمکی}} x-1 \mid 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \\ x-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

به ازای هر x ، دقیقاً یک y به وجود می آید پس ۴ نقطه وجود دارد.

پ) گزینه (۱): نادرست. مثلاً $-1 < 2$ ولی $\frac{1}{p} \nmid -1$.

گزینه (۲): نادرست. مثلاً اگر $a=1$ و $b=1$ بگیریم $a+2b=3$ فرد است ولی $a+b=4$ زوج است.

گزینه (۳): درست، اگر n عامل ۲ داشته باشد $4 \mid n^2$ و برعکس.

گزینه (۴): نادرست، مثلاً اگر $a=2$ و $b=2$ بگیریم، ab زوج است ولی a^2+b^2 هم زوج است.

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{3, 4\}$ تعریف شده‌اند. با ذکر نام روش استدلال، نشان دهید اگر $n \in S$ و عدد

$$\frac{n^2(n-1)^2}{9} \text{ طبیعی و زوج باشد آن گاه } n \in A. \text{ (۱ نمره)}$$

۴

راهنمای تصحیح >> کافی است از روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها (۰/۲۵) استفاده کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{(1)^2(0)^2}{9} = 0 \times$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{(2)^2(1)^2}{9} = \frac{4}{9} \times$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{(3)^2 \times (2)^2}{9} = 4 \checkmark \text{ (۰/۲۵)}$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{(4)^2 \times (3)^2}{9} = 16 \checkmark \text{ (۰/۲۵)}$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{(5)^2(4)^2}{9} \notin \mathbb{Z}$$

پس $n = 3$ یا $n = 4$ یعنی $n \in A$. (۰/۲۵) (صفحه ۵)



با استفاده از برهان خلف ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آن گاه $3n+1$ فرد است.» (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

خلاف حکم را در نظر می گیریم یعنی فرض می کنیم $3n+1$ زوج باشد (۰/۲۵)

$$3n+1=2k \Rightarrow 3n=2k-1 \quad (۰/۲۵)$$

$3n$ فرد است پس n هم باید فرد باشد (۰/۲۵)

$$n^2 \text{ فرد است} \Rightarrow n^2 = 4k'^2 - 4k' + 1 = 2(\underbrace{2k'^2 - 2k'}_q) + 1 = 2q + 1 \quad (۰/۲۵)$$

طبق فرض n^2 زوج بود پس به تناقض رسیدیم. (۰/۲۵) فرض خلف باطل و خود حکم درست است. (۰/۲۵) (صفحه ۵)



۶ نشان دهید اگر n عددی طبیعی و $a | b$ آن گاه $a | b^n$. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح « طبق تعریف رابطه عا دکردن داریم:

$$a | b \Rightarrow \underbrace{aq = b}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{\text{توان } n} a^n q^n = b^n \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow a \underbrace{(a^{n-1} q^n)}_{q'} = b^n \Rightarrow a | b^n \quad (۰/۲۵)$$

توجه اگر ابتدا رابطه $a | bm$ ثابت شده و بعد با استفاده از آن حکم نتیجه گرفته شده است (مانند زیر) بارم به تناسب، تقسیم گردد.

$$a | b \Rightarrow aq = b \Rightarrow aqm = bm \Rightarrow a | bm$$

$$a | b \xrightarrow[\text{در } b^{n-1} \text{ ضرب}]{\text{سمت راست}} a | b^n \quad (\text{صفحه } ۱۰)$$

جمع بندی ویژگی های عا دکردن: اگر $a | b$ آن گاه b مضرب a و a مقسوم علیه b است.

درس Box

از رابطه $a b$ چه نتایجی می توانیم بگیریم	
$\pm a \pm b$	علامت مهم نیست.
$ka kb$	دو طرف را در عدد صحیح دلخواه k ضرب کنیم.
$a^n b^n$	دو طرف را به توان عدد طبیعی دلخواه n برسانیم.
$a b^n$	فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
$a kb$	فقط سمت راست را در عدد صحیح k ضرب کنیم.
$ a \leq b $ (باید $b \neq 0$)	قدرمطلق سمت راست بزرگ تر یا مساوی قدرمطلق سمت چپ است.
به جای a می توانیم مقسوم علیه آن را قرار دهیم (a را لاغر کنیم).	

از دو رابطه $a b$ و $a c$ چه نتایجی می توانیم بگیریم	
$a b \pm c$	سمت راست ها را با هم جمع و تفریق کنیم.
$a mb \pm nc$	سمت راست ها را در عدد صحیح دلخواه ضرب کرده و بعد جمع و تفریق کنیم.

توجه برای اثبات یک رابطه به صورت $a | b$ باید نشان دهیم عبارت صحیحی مثل q وجود دارد که $aq = b$.
اثبات همه ویژگی های بالا به همین صورت انجام می شود.

ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی a و b رابطه زیر درست است. (۱/۵ نمره)

$$2a^2 + b^2 - 4a + 4b + 6 \geq 0$$

۷

راهنمای تصحیح

سعی می کنیم حکم را با ترکیب های دوشروطی درست به یک رابطه همواره درست برسانیم:

$$2a^2 + b^2 - 4a + 4b + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + b^2 - 4a + 4b + 2 + 4 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$2(\underbrace{a^2 - 2a + 1}_{(۰/۲۵)}) + (\underbrace{b^2 + 4b + 4}_{(۰/۲۵)}) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\underbrace{(a-1)^2}_{(۰/۲۵)}) + (\underbrace{(b+2)^2}_{(۰/۲۵)}) \geq 0$$

رابطه آخر همواره درست است. (۰/۲۵) (صفحه ۶)

توجه: گذاشتن فلش های دو طرفه یا نوشتن جمله «رابطه آخر همواره درست و تمامی مراحل برگشت پذیرند» هر کدام که نوشته شده باشد قابل قبول است و (۰/۲۵) تعلق گیرد.

درس Box

روش اثبات حکم p با گزاره های هم ارز (اثبات بازگشتی): سعی می کنیم با اعمال درست دوطرفه ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، ترکیب های درست دوشروطی $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ بسازیم تا جایی که به یک رابطه همواره درست برسیم. چون آخرین گزاره همواره درست و ترکیب های دوشروطی هم درست هستند. پس همه گزاره ها هم ارزش بوده و حکم p درست می شود.

دقت کنید رابطه همواره درست آخر، معمولاً جمع مربعات چند عبارت است که همواره بزرگ تر یا مساوی صفر است.

عدد $11k + 3$ بر a بخش پذیر و عدد a عدد $3k - 4$ را عاد می کند. همه مقادیر ممکن برای عدد طبیعی a را به

دست آورید. (۱/۵ نمره)

۸

راهنمای تصحیح

$$\begin{aligned} a \mid 11k + 3 \quad (\times 3) &\rightarrow a \mid 33k + 9 \quad (\div 3) & a \mid 3k - 4 \quad (\times 11) &\rightarrow a \mid 33k - 44 \quad (\div 11) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \quad (\div 3) \\ a = 53 \quad (\div 11) \end{cases} \end{aligned}$$

(صفحه ۱۱)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ وقتی $a \mid b$ می گوئیم b بر a بخش پذیر است یا a عدد b را عاد می کند. داریم:

$$a \mid 11k + 3$$

$$a \mid 3k - 4$$

سمت راست رابطه عاد کردن را می توانیم در هر عدد دلخواه و صحیح ضرب کنیم.

$$a \mid 11k + 3 \xrightarrow{\times 3} a \mid 33k + 9$$

$$a \mid 3k - 4 \xrightarrow{\times 11} a \mid 33k - 44$$

$$a \mid (33k + 9) - (33k - 44) = 53$$

دو عدد سمت راست را می توانیم از هم کم کنیم پس 53 است پس $a = 1$ یا $a = 53$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

۹ نشان دهید اگر $۲k - ۱ \mid ۳k^۲ + ۲k + ۷$ آنگاه $۹ \mid ۴k^۲ + ۲k + ۷$ (۷/۵ نمره)

راهنمای تصحیح»

$$۳ \mid ۲k - ۱ \xrightarrow[\text{توان } ۲]{\text{دو طرف به}} ۹ \mid ۴k^۲ - ۴k + ۱ \quad (۰/۵)$$

$$۳ \mid ۲k - ۱ \xrightarrow[\text{دو طرف } \times ۳]{\text{دو طرف به}} ۹ \mid ۶k - ۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$۹ \mid ۹ \quad (۰/۲۵)$$

$$۹ \mid ۴k^۲ + ۲k + ۷ \quad (۰/۵)$$

سمت راست ۳ رابطه را جمع می کنیم:

(صفحه ۱۶)



باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۷ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است. باقی مانده تقسیم عدد $2m - n^2$ را بر ۷ به

دست آورید. (۱/۵ نمره)

۱۰

راهنمای تصحیح >> رابطه های تقسیم را می نویسیم:

$$\begin{cases} m = 7q + 3 & (۰/۲۵) \\ n = 7k + 4 & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$2m - n^2 = 2(7q + 3) - (7k + 4)^2 = 14q + 6 - (49k^2 + 56k + 16) \quad (۰/۲۵)$$

$$= 7(\underbrace{2q - 7k^2 - 8k}_{t}) - 10 = \underbrace{7t' + 14 - 10}_{(۰/۲۵)} = 7t' + 4 \quad (صفت ۱۴)$$

باقی مانده

توجه! اگر اثبات با استفاده از هم نهشتی نیز نوشته شده بارم مناسب تقسیم گردد.

قضیه تقسیم: a عددی صحیح و b عددی طبیعی است. با تقسیم عدد a بر b ، اعداد صحیح و منحصر به فرد q و r وجود دارند که: $a = bq + r$.

دقت کنید که a مقسوم، b مقسوم علیه، q خارج قسمت و r باقیمانده است. شرط باقیمانده آن است که $0 \leq r < b$.

درس Box

نکته

در تقسیم عدد a بر b اگر باقی مانده به صورت ظاهری، منفی باشد آنقدر از مقسوم علیه (b) به آن اضافه می کنیم تا در محدوده خودش قرار گیرد. مثلاً داریم:

$$a = 8k - 10 \xrightarrow{+8} 8k' - 2 = 8k'' + 6 \quad (\text{باقیمانده } a \text{ بر } 8 \text{ برابر } 6 \text{ است})$$

$$a = 15k - 23 \xrightarrow{+2 \times 15} 15k' + 7 \quad (\text{باقیمانده } a \text{ بر } 15 \text{ برابر } 7 \text{ است})$$

حواست باشه که! باقی مانده نباید منفی باشد پس در مرحله آخر دو تا ۷ یعنی ۱۴ به -10 اضافه می کنیم (دو بسته ۷ تایی از خارج قسمت باز می کنیم) تا مثبت شود.

ایران نوننه
توشه ای برای موفقیت

باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب برابر ۲ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۱ را به دست

آورید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\begin{cases} \overbrace{a = 6k + 2}^{(0/25)} \xrightarrow{\times 7} 7a = 42k + 14 \\ \overbrace{a = 7k' + 5}^{(0/25)} \xrightarrow{\times 6} 6a = 42k' + 30 \end{cases} \quad (0/25)$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$a = 42(\underbrace{k - k'}_q) - 16 \quad (0/25)$$

چون می‌خواهیم مقسوم‌علیه برابر ۲۱ باشد؛ داریم:

$$a = 21(2q) - 16 \Rightarrow a = 21q' + 21 - 16 = 21q' + 5 \quad (0/25)$$

پس باقیمانده برابر ۵ است. (۰/۲۵) (صفحه ۱۶)

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ اگر $b = 4k + 1$ و $a \mid 2^0! + b$ ، باقی‌مانده تقسیم عدد $3 + 2b^2 + a^2$ بر ۸ را به دست آورید. (ارائه راه حل

الزامی است) (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح « b فرد است (۰/۲۵) از طرفی $2^0!$ زوج پس $b + 2^0!$ فرد است. (۰/۲۵)

a مقسوم‌علیه عددی فرد است پس a هم فرد است. (۰/۲۵)

مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است. (۰/۲۵)

$$a^2 + 2b^2 + 3 = 8k + 1 + 2(8k' + 1) + 3 \quad (۰/۲۵)$$

$$= 8(\underbrace{k + 2k'}_q) + 6 = 8q + 6 \quad (۰/۲۵)$$

باقی‌مانده

(صفحه ۱۶)

نکته  همواره به یاد داشته باشید که اگر a عددی فرد باشد مربع عدد a به صورت $8q + 1$ است؛ یعنی: $a^2 = 8q + 1$
فرد

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

مرحله : آزمون میان نوبت اول | پایه دوازدهم ریاضی و فیزیک

الف) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $3n - 7$ و $n + 2$ را به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n به دست آورید.

۱۳

ب) مشخص کنید به ازای کدام n ها، ب.م.م بزرگ‌ترین عدد ممکن خواهد بود. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح >> الف) ب.م.م دو عدد را برابر d فرض می‌کنیم $d = (3n - 7, n + 2)$ (۰/۲۵)

d هر دو عدد را عاد می‌کند.

$$d \mid 3n - 7$$

$$d \mid n + 2 \xrightarrow{\times(-3)} d \mid -3n - 6$$

سمت راست دو رابطه را جمع می‌کنیم پس $d \mid -13$ از طرفی $d > 0$ پس $d = 1$ یا $d = 13$ (۰/۲۵)

می‌تواند باشد.

ب) اگر در رابطه دوم $d = 13$ قرار دهیم؛ داریم:

$$13 \mid n + 2 \Rightarrow 13k = n + 2 \Rightarrow n = 13k - 2 \quad (۰/۵)$$

پس اگر n به صورت $13k - 2$ باشد ب.م.م دو عدد برابر ۱۳ می‌شود. (صفحه ۱۶)

توجه اگر با حل معادله هم‌نهشتی نیز n را به دست آورده باشد در قسمت «ب» نمره منظور گردد.

ایران تونلنه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ a عددی صحیح است. نشان دهید همواره یکی از اعداد $a-1$ و $a+6$ و $2a+2$ بر ۳ بخش پذیر است. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح

هر عدد صحیح a به یکی از صورت های $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ است.

اگر $a = 3k$ باشد عدد $a+6$ مضرب ۳ است، چون:

(۰/۲۵)

$$a+6 = 3k+6 = 3(k+2) \quad (۰/۲۵)$$

اگر $a = 3k+1$ باشد عدد $a-1$ مضرب ۳ است، چون:

(۰/۲۵)

$$a-1 = 3k+1-1 = 3k \quad (۰/۲۵)$$

اگر $a = 3k+2$ باشد عدد $2a+2$ مضرب ۳ است، چون:

(۰/۲۵)

$$2a+2 = 2(3k+2)+2 = 6k+6 = 3(2k+2) \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه ۱۷)

افراز اعداد صحیح

درس Box

عدد صحیح n را در نظر بگیرید:

- اگر آن را بر ۲ تقسیم کنیم باقی مانده برابر صفر یا ۱ می شود؛ پس:
هر عدد صحیح به صورت $n = 2k$ یا $n = 2k+1$ است (یعنی هر عدد صحیح، زوج است یا فرد).
 - اگر هر عدد را بر ۳ تقسیم کنیم باقی مانده برابر صفر، ۱ یا ۲ می تواند باشد پس:
هر عدد صحیح به یکی از شکل های $3k$ ، $3k+1$ یا $3k+2$ نوشته می شود؛ به زبان دیگر اعداد صحیح به ۳ زیرمجموعه افراز می شود.
- اگر بخواهیم حکمی را در مورد بخش پذیری بر ۳ (مثل این سؤال) ثابت کنیم از افراز اعداد صحیح به ۳ گروه استفاده می کنیم.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۵

نشان دهید اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر n بخش پذیر باشند باقی مانده نیز بر n

بخش پذیر است. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

رابطه تقسیم به صورت $a = bq + r$ (۰/۲۵) است.

a و b هر دو بر n بخش پذیرند پس $a = nk$ و $b = nk'$ (۰/۲۵). با جای گذاری داریم:

$$nk = nk'q + r \Rightarrow n \underbrace{(k - k'q)}_{q'} = r \Rightarrow n \mid r \quad (۰/۲۵)$$

پس r هم بر n بخش پذیر است. (صفحه ۱۷)

