

	مرحله ۱: آزمون میان نوبت اول: آمار و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۸/۱۸											
	نام و نام خانوادگی:	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه											
	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	تعداد صفحه: ۲											
ردیف	سوالات (پاسخ برگ دارد).			نمره										
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) ارزش ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره درست باشد. ب) گزاره‌های $(p \Rightarrow p)$ و $(p \vee \sim p)$ ، همیشه درست هستند. پ) اگر $A = \{1, 2, 4, 5\}$ باشد، در این صورت مجموعه توانی A ، ۱۶ عضو دارد. ت) اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ به صورت $A \times B = \{(x, y) x \in A \vee x \in B\}$ تعریف می‌شود.			۱										
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، نامیده می‌شود. ب) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن‌گاه: $p \vee F \equiv \dots\dots\dots$. پ) اگر $n(A) = 3$ و $n(B) = 2$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های $A \times B$ برابر است با ت) اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای با ارزش باشد، ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ درست است.			۱										
۳	ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید. الف) $((-1)^3 + 1 = 0) \vee (5 > 3)$ ب) $(-3 < -2) \Leftrightarrow (2 > 3)$			۰/۵										
۴	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$			۱/۵										
۵	ثابت کنید: اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.			۱										
۶	گزاره سوری مقابل را در نظر بگیرید (P ، مجموعه اعداد اول است): $\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$ الف) ارزش گزاره را با ذکر دلیل مشخص کنید. ب) نقیض گزاره را بنویسید.			۱										
۷	گزاره مناسب برای هر کدام از عبارت‌های گروه A را از گروه B انتخاب کنید. (دو مورد در گروه B اضافی است). <table border="1"><thead><tr><th colspan="4">گروه B</th><th>گروه A</th></tr></thead><tbody><tr><td>$p \vee \sim p$</td><td>$p \Rightarrow \sim p$</td><td>$p \wedge \sim p$</td><td>$\sim (p \Rightarrow p) \Rightarrow q$</td><td>الف) گزاره همیشه نادرست. ب) گزاره‌ای که به انتفای مقدم درست است.</td></tr></tbody></table>			گروه B				گروه A	$p \vee \sim p$	$p \Rightarrow \sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \Rightarrow p) \Rightarrow q$	الف) گزاره همیشه نادرست. ب) گزاره‌ای که به انتفای مقدم درست است.	۱
گروه B				گروه A										
$p \vee \sim p$	$p \Rightarrow \sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \Rightarrow p) \Rightarrow q$	الف) گزاره همیشه نادرست. ب) گزاره‌ای که به انتفای مقدم درست است.										
۸	برای مجموعه‌های دلخواه A و B با مرجع U ، ثابت کنید: $A \cap B = B \cap A$			۲										
۹	اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد اعضای $P(A)$ ، ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه سره دارد؟			۱/۵										
۱۰	اگر A, B, C و D ، چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن‌گاه $A \cap C \subseteq B \cap D$.			۱										

	مرحله ۱: آزمون میان نوبت اول: آمار و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۸/۱۸	
	نام و نام خانوادگی:	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	تعداد صفحه: ۲	
ردیف	سوالات (پاسخ برگ دارد).			نمره
۱۱	اگر A, B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، آن گاه هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمودار ون نمایش دهید. (الف) $(A \cup B) - C$ (ب) اعضای که فقط عضو یکی از مجموعه‌ها هستند.			۱
۱۲	با استفاده از جبر مجموعه‌ها نشان دهید که: $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$			۲
۱۳	نشان دهید مجموعه‌های $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 2m\}$ و $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 + 2m = 3m^2\}$ با هم برابرند.			۱/۵
۱۴	اگر A ، یک مجموعه دلخواه باشد، ثابت کنید $A \times \emptyset = \emptyset$.			۱
۱۵	اگر A و B دو مجموعه از اعداد حقیقی به صورت $A = [-2, 3]$ و $B = [2, 5]$ تعریف شوند، مساحت ناحیه $A^2 - A \times B$ را به دست آورید.			۱/۵
۱۶	مجموعه‌های چهارعضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ مفروض‌اند. اگر $A \times B = B \times A$ باشد، مقدار $x + y - z - t$ را به دست آورید.			۱/۵
	موفق باشید			۲۰
	جمع نمره			

آمار و احتمال

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

- الف) ارزش ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره درست باشد.
 ب) گزاره‌های $(p \Rightarrow p)$ و $(p \vee \sim p)$ ، همیشه درست هستند.
 پ) اگر $A = \{1, 2, 4, 5\}$ باشد، در این صورت مجموعه توانی A ، ۱۶ عضو دارد.
 ت) اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ به صورت $A \times B = \{(x, y) | x \in A \vee x \in B\}$ تعریف می‌شود.

راهنمای تصحیح

الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۵)

ب) درست (۰/۲۵) (صفحه ۹)

پ) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۷)

ت) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۳۰)

درس Box

۱) به مجموعه‌ای که شامل تمام زیرمجموعه‌های مجموعه A باشد، مجموعه توانی A می‌گوییم و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم.

۲) یک مجموعه n عضوی، 2^n زیرمجموعه دارد.

۳) اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، طبق دو مورد بالا، $P(A)$ ، 2^n عضو دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) کلمه «فقط» کار را خراب کرده؛ ترکیب فصلی دو گزاره حتی اگر یکی از گزاره‌ها هم درست باشد، ارزشش درست است.

ب) با توجه به جدول‌های زیر $p \Rightarrow p$ و $p \vee \sim p$ همیشه درست‌اند.

p	p	$p \Rightarrow p$
د	د	د
ن	ن	د

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

پ) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چهار عضو دارد، پس طبق مورد ۳ درس Box، مجموعه توانی A ، $2^4 = 16$ عضو دارد.

ت) درستش این است: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱ نمره)

الف) هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، نامیده می شود.

ب) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن گاه: $p \vee F \equiv$

پ) اگر $n(A) = 3$ و $n(B) = 2$ باشد، تعداد زیرمجموعه های $A \times B$ برابر است با

ت) اگر p گزاره ای درست و q گزاره ای با ارزش باشد، ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ درست است.

راهنمای تصحیح « الف) گزاره نما (۰/۲۵) (صفحه ۳)

ب) p (۰/۲۵) (صفحه ۱۵)

پ) 2^6 یا 64 (۰/۲۵) (صفحه ۳۰)

ت) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ب) اگر p درست باشد، $p \vee F$ درست و اگر p نادرست باشد، $p \vee F$ نادرست است، پس $p \vee F$ با خود p هم ارز است.

پ) تعداد اعضای $A \times B$ می شود: $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 2 = 6$

پس $A \times B$ ، « $2^6 = 64$ » تا زیرمجموعه دارد.

ت) گزاره $p \Leftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q هم ارزش باشند. به گفته سؤال p درست است، پس q هم باید درست باشد تا ارزش $p \Leftrightarrow q$ درست بشود.

۳

ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید. (۵/۰ نمره)

الف) $(5 > 3) \vee ((-1)^3 + 1 = 0)$

ب) $(2 > 3) \Leftrightarrow (-2 < -3)$

راهنمای تصحیح >> الف) درست (۵/۰/۲۵) (صفحه ۱۴)

ب) درست (۵/۰/۲۵) (صفحه ۱۴)

درس Box

۱) جدول ارزش گزاره‌های $p \vee q$ و $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	د

۲) طبق جدول بالا:

- گزاره $p \Leftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.
- گزاره $p \vee q$ وقتی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) $\underbrace{(5 > 3)}_d \vee \underbrace{((-1)^3 + 1 = 0)}_d$

ب) $\underbrace{(2 > 3)}_n \Leftrightarrow \underbrace{(-2 < -3)}_n$

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که: (۱/۵ نمره)

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

راهنمای تصحیح

p	q	r	$p \wedge q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

ستون مربوط به نتیجه گزاره‌های $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ و $(p \wedge q) \Rightarrow r$ کاملاً یکسان‌اند، پس این دو گزاره هم‌ارزند. (۰/۲۵)

(صفحه ۱۵)

(۱) جدول ارزش مربوط به ۱، ۲ و ۳ گزاره به صورت زیرند:

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

(۲) جدول ارزش گزاره‌های $p \vee q$ (همون p یا q)، $p \wedge q$ (همون p و q)، $p \Rightarrow q$ (اگر p، آن‌گاه q) و $p \Leftrightarrow q$ (اگر و تنها اگر q) را به صورت زیر بلد باشید:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

ثابت کنید؛ اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است. (۱ نمره)

۵

راهنمای تصحیح

(۰/۵) a^2 عددی زوج است $\Rightarrow a$ عددی زوج است $\equiv (a$ عددی فرد است $\Rightarrow a^2$ عددی فرد است)

اگر a عدد زوج باشد، $a = 2k$ می‌شود، پس داریم:

$$a^2 = (2k)^2 \quad (۰/۲۵) = 4k^2 = 2 \underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k' \quad (۰/۲۵) \quad (\text{صفحه ۹})$$

درس‌Box

گزاره شرطی $q \Rightarrow p$ و عکس نقیضش، یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم‌ارزند. با توجه به این هم‌ارزی اگر عکس نقیض گزاره‌ای را اثبات کنیم؛ انگار خود قضیه را اثبات کرده‌ایم. این کار را وقتی انجام می‌دهیم که اثبات عکس نقیض گزاره از اثبات خود گزاره ساده‌تر باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اثبات عکس نقیض گزاره ساده‌تر از اثبات خود گزاره است؛ پس همین کار را انجام می‌دهیم. اول عکس نقیض گزاره را به دست می‌آوریم:

$(a^2$ عددی فرد است $\Rightarrow \sim (a$ عددی فرد است $\Rightarrow \sim (a$ عددی فرد است $\Rightarrow a^2$ عددی فرد است)

$\equiv (a^2$ عددی زوج است $\Rightarrow a$ عددی زوج است)

اگر a عددی زوج باشد، $a = 2k$ و در نتیجه a^2 می‌شود:

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$$

گزارهٔ سوری مقابل را در نظر بگیرید (P، مجموعهٔ اعداد اول است): (۱ نمره)

الف) ارزش گزاره را با ذکر دلیل مشخص کنید.

ب) نقیض گزاره را بنویسید.

راهنمای تصحیح >> الف) نادرست (۰/۲۵)، چون مثلاً اگر $n = 3$ باشد، $2^3 + 1 = 2^3 + 1 = 9$ می‌شود که عددی اول نیست. (۰/۲۵)

ب) $\exists n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \notin P$ (۰/۵) (صفحه ۱۵)

برای به دست آوردن نقیض سورها، دو مورد زیر را بلد باشید:

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x) \quad , \quad \sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

کرتس Box

ایران توننه
توشه ای برای موفقیت

گزاره مناسب برای هر کدام از عبارت های گروه A را از گروه B انتخاب کنید. (دو مورد در گروه B اضافی است). (۱ نمره)

گروه B				گروه A
$p \vee \sim p$	$p \Rightarrow \sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \Rightarrow p) \Rightarrow q$	الف) گزاره همیشه نادرست.
				ب) گزاره ای که به انتقای مقدم درست است.

راهنمای تصحیح $p \wedge \sim p$ (الف) (۵/۰) (صفحه ۹)

$\sim (p \Rightarrow p) \Rightarrow q$ (ب) (۵/۰) (صفحه ۹)

۱) در گزاره شرطی $\square \Rightarrow \bigcirc$ ، اگر مقدم $\square$ نادرست باشد، بدون توجه به ارزش $\bigcirc$ می توانیم بگوییم گزاره شرطی درست است. در چنین حالتی اصطلاحاً می گوییم «گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است».

۲) بهتر است چند تا گزاره همیشه درست یا نادرست زیر را بشناسید:

گزاره همیشه درست	$p \Rightarrow p$, $p \vee \sim p$
گزاره همیشه نادرست	$p \Leftrightarrow \sim p$, $\sim p \Leftrightarrow p$, $p \wedge \sim p$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) از بین p و $\sim p$ ، یکی درست و دیگری نادرست است، پس $p \wedge \sim p$ همیشه نادرست است.

ب) طبق مورد (۱) درس Box، $p \Rightarrow p$ همیشه درست است، پس $\sim (p \Rightarrow p)$ همیشه نادرست، در نتیجه طبق مورد (۲) درس Box، $\underbrace{\sim (p \Rightarrow p)}_D \Rightarrow q$ به انتقای مقدم درست است.

ن

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

برای مجموعه های دلخواه A و B با مرجع U ، ثابت کنید: $A \cap B = B \cap A$ (۲ نمره)



راهنمای تصحیح >>

$$\begin{aligned} & \overbrace{\forall x; [x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in (B \cap A)]}^{(۰/۲۵)} \quad (۱) \\ & \overbrace{\forall x; [x \in (B \cap A) \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)]}^{(۰/۲۵)} \quad (۲) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (۱): A \cap B \subseteq B \cap A \\ (۲): B \cap A \subseteq A \cap B \end{cases} \Rightarrow A \cap B = B \cap A \quad (۰/۵)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می گیریم که:

(صفحه ۱۹)

جای اثبات تساوی دو مجموعه مثل A و B کافی است ثابت کنیم هم $A \subseteq B$ است؛ هم $B \subseteq A$.

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ طبق درس box، برای اثبات مساوی بودن $A \cap B$ با $B \cap A$ باید ثابت کنیم:

$$A \cap B \subseteq B \cap A \quad (۱) ; B \cap A \subseteq A \cap B \quad (۲)$$

$$\forall x; [x \in (A \cap B) \Rightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in B}_{\text{خاصیت جابه جایی}} \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in (B \cap A)] \quad \bullet \text{ اثبات (۱):}$$

$$\forall x; [x \in (B \cap A) \Rightarrow \underbrace{x \in B \wedge x \in A}_{\text{خاصیت جابه جایی}} \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)] \quad \bullet \text{ اثبات (۲):}$$

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۹

اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد اعضای $P(A)$ ، ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه A چند

زیرمجموعه سره دارد؟ (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح ▶ فرض می کنیم مجموعه A ، n عضوی باشد، در این صورت داریم:

$$2^n - 2^{n-2} = 384 \quad (\div 25) \Rightarrow 2^{n-2}(2^2 - 1) = 384 \quad (\div 25) \Rightarrow 2^{n-2} = 128 = 2^7 \quad (\div 25)$$

$$\Rightarrow n - 2 = 7 \Rightarrow n = 9 \quad (\div 25)$$

$$A \text{ بنابراین: } \text{تعداد زیرمجموعه های سره } A = 2^9 - 1 \quad (\div 25) = 511 \quad (\div 25)$$

(صفحه ۳۳)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرض می کنیم مجموعه A ، n عضوی باشد. در این صورت $P(A)$ که شامل تمام زیرمجموعه های A است، 2^n عضو دارد. با حذف ۲ عضو از اعضای n ، تعداد اعضای A به $n - 2$ و در نتیجه تعداد اعضای $P(A)$ به 2^{n-2} می رسد. به گفته سؤال تعداد اعضای $P(A)$ در دو حالت، ۳۸۴ واحد اختلاف دارند، پس باید بنویسیم:

$$2^n - 2^{n-2} = 384 \xrightarrow{\text{فکتور از } 2^{n-2}} 2^{n-2}(\underbrace{2^{n-(n-2)} - 1}_{2^2 - 1 = 3}) = 384 \xrightarrow{\div 3} 2^{n-2} = 128$$

$$\xrightarrow{128 = 2^7} 2^{n-2} = 2^7 \Rightarrow n - 2 = 7 \Rightarrow n = 9$$

نکته ▶

هر مجموعه n عضوی، « $2^n - 1$ » زیرمجموعه سره دارد.

مجموعه A ، ۹ عضو دارد، پس « $2^9 - 1 = 511$ » زیرمجموعه سره دارد.

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

۱۰ اگر A, B, C و D ، چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن گاه $A \cap C \subseteq B \cap D$. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

$$\underbrace{\forall x \in (A \cap C)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in C}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow[A \subseteq D]{A \subseteq B} \underbrace{x \in B \wedge x \in D}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{x \in (B \cap D)}_{(۰/۲۵)}$$

بنابراین $A \cap C \subseteq B \cap D$.

(صفحه ۳۳)

برای اثبات این که $A \cap C \subseteq B \cap D$ است، باید ثابت کنیم هر x ای عضو $A \cap C$ باشد، عضو $B \cap D$ هم هست:

$$\forall x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \quad (۱)$$

به گفته سؤال $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ است، پس از این که $x \in A$ و $x \in C$ است، به ترتیب نتیجه می گیریم که $x \in B$ و $x \in D$ است.

حالا (۱) را ادامه می دهیم:

$$\forall x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \cap D$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

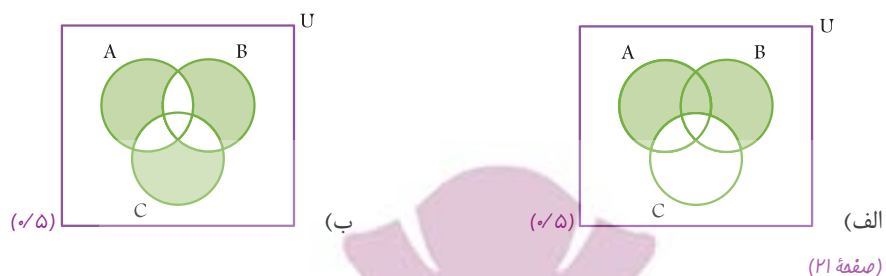
ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

اگر A ، B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، آن گاه هر یک از مجموعه‌های زیر را با نمودار ون نمایش دهید. (۱ نمره)

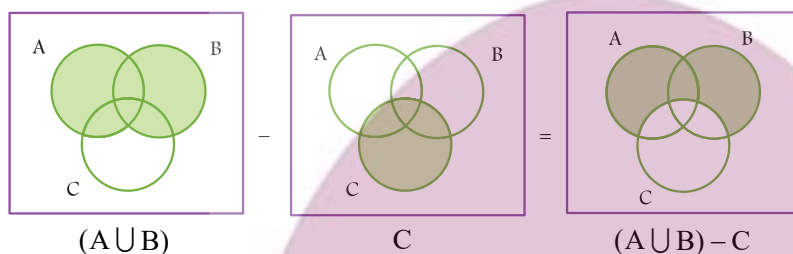
الف) $(A \cup B) - C$

ب) اعضای که فقط عضو یکی از مجموعه‌ها هستند.

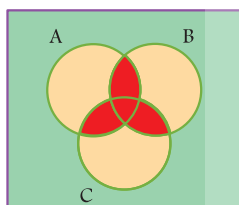
راهنمای تصحیح



پاسخ خیلی تشریحی ✓ (الف)



ب) در شکل مقابل ناحیه‌های قرمز متعلق به ۲ یا ۳ مجموعه و ناحیه سبز، متعلق به هیچ مجموعه‌ای نیست، پس با حذف این دو ناحیه به اعضای می‌رسیم که فقط عضو یکی از مجموعه‌ها هستند.



ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

با استفاده از جبر مجموعه‌ها نشان دهید که: (۲ نمره)

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$$

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B') \cap (A \cap C') \quad (۰/۲۵)$$

$$= [(A \cap B') \cap A] \cap C' \quad (۰/۲۵)$$

$$= [A \cap (A \cap B')] \cap C' \quad (۰/۲۵)$$

$$= [(A \cap A) \cap B'] \cap C' = (A \cap B') \cap C' \quad (۰/۵)$$

$$= A \cap (B' \cap C') \quad (۰/۲۵)$$

$$= A - (B' \cap C')' \quad (۰/۲۵)$$

$$= A - (B \cup C) \quad (۰/۲۵)$$

راهنمای تصحیح « تبدیل تفاضل به اشتراک

شرکت پذیری

جابه جایی

شرکت پذیری

شرکت پذیری

تبدیل اشتراک به تفاضل

قانون دموگران

(صفحه ۲۸)

قوانین مهم مربوط به جبر مجموعه‌ها را در جدول زیر برایتان آورده‌ایم:

اسم قانون	قانون به زبان ریاضی
جابه جایی	$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
شرکت پذیری	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
توزیع پذیری	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
تبدیل تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$
جذب	$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$

درس Box

ایران توننده
توشه ای برای موفقیت

۱۳ نشان دهید مجموعه های $A = \{m \in \mathbb{Z} | m^2 \leq 2m\}$ و $B = \{m \in \mathbb{Z} | m^2 + 2m = 3m^2\}$ با هم برابرند. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح >>

$$\begin{aligned} \begin{cases} m^2 \leq 2m \Rightarrow m(m-2) \leq 0 \quad (0/25) \Rightarrow 0 \leq m \leq 2 \quad (0/25) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0, 1, 2 \quad A = \{0, 1, 2\} \quad (0/25) \\ m^2 + 2m - 3m^2 = 0 \Rightarrow m(m^2 - 3m + 2) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow m(m-1)(m-2) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow m = 0, 1, 2 \Rightarrow B = \{0, 1, 2\} \\ \Rightarrow A = B \quad (0/25) \end{cases} \end{aligned}$$

(صفحه ۳۳)



۱۴ اگر A ، یک مجموعه دلخواه باشد، ثابت کنید $A \times \emptyset = \emptyset$. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح

فرض می‌کنیم $A \times \emptyset \neq \emptyset$ باشد (فرض خلف) (۰/۲۵)، در این صورت حداقل یک عضو مثل (x, y) باید در

$A \times \emptyset$ وجود داشته باشد (۰/۲۵)، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$(x, y) \in A \times \emptyset \Rightarrow x \in A, y \in \emptyset \quad (۰/۲۵)$$

$y \in \emptyset$ یک تناقض است، چون مجموعه تهی عضو ندارد، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. (۰/۲۵)

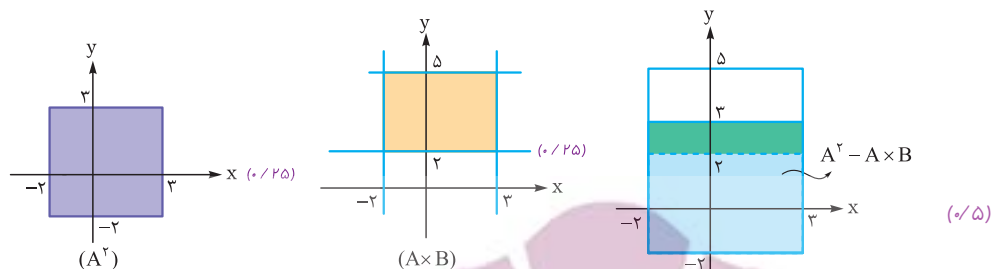
(صفحه ۳۲)



۱۵ اگر A و B دو مجموعه از اعداد حقیقی به صورت $A = [-2, 3]$ و $B = [2, 5]$ تعریف شوند، مساحت ناحیه

$A^2 - A \times B$ را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

راهنمای تصحیح



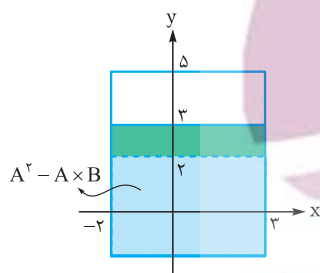
$$S = (5 \times 5) - (3 \times 3) = 20 \quad (۰/۵)$$

پس مساحت ناحیه $A^2 - A \times B$ می شود:

(صفحه ۳۱ و ۳۲)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای محاسبه مساحت ناحیه $A^2 - A \times B$ ، باید مساحت ناحیه مشترک $A \times B$ و A^2 را از مساحت A^2 کم کنیم.

طبق شکل مقابل، A^2 یک مربع 5×5 است که مساحتش برابر ۲۵ واحد است. از طرفی ناحیه مشترک $A \times B$ و A^2 یک مستطیل با ابعاد $(3 - (-2)) \times (3 - 2)$ است که مساحتش برابر ۵ است؛ بنابراین مساحت ناحیه مربوط به $A^2 - A \times B$ می شود $25 - 5 = 20$.



ایران تونل
توشه ای برای موفقیت

مرحله : آزمون میان نوبت اول | پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

مجموعه های چهارعضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ مفروض اند. اگر $A \times B = B \times A$ باشد،

۱۶

مقدار $x+y-z-t$ را به دست آورید. (۵/۱ نمره)

راهنمای تصحیح >>

$$A \times B = B \times A \xrightarrow[B \neq \emptyset]{A \neq \emptyset} A = B \quad (۵/۱)$$

$A = \{x+2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t-1\}$ برابرند، پس مجموع اعضایشان هم باید برابر باشد:

$$(۲۵/۱) \Rightarrow (x+2) + 1 + 4 + y = 5 + 7 + z + (t-1) \Rightarrow \text{مجموع اعضای } A = \text{مجموع اعضای } B$$

$$\Rightarrow x + y + 7 = z + t + 11 \Rightarrow x + y - z - t = 11 - 7 = 4 \quad (۵/۱)$$

(صفحه ۳۴)

اگر برای دو مجموعه دلخواه A و B تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار باشد، می توانیم بگوییم:

$$A = B \quad \text{یا} \quad B = \emptyset \quad \text{یا} \quad A = \emptyset$$

نکته >>

ایران تونل
توشه ای برای موفقیت