دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۱۹ آبان ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حساب‌ان ۲ و ریاضی پایه	کاظم اجلالی- امیرمحمد باقری‌نصرآبادی- مسعود برملا- عادل حسینی- فرشاد صدیقی‌فر- رضا طاری- پویان طهرانیان حمید علیزاده- کامیار علّیبون- جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب- اسحاق اسفندیار- جواد ترکمن- افشین خاصه‌خان- فرزانه خاکپاش- کیوان دارابی- سوگند روشنی محمد صحت‌کار- هومن عقیلی- مهرداد ملوندی
	ریاضیات گسسته	جواد ترکمن- افشین خاصه‌خان- کیوان دارابی- سوگند روشنی- محمد صحت‌کار
	فیزیک	مهران اسماعیلی- عبدالرضا امینی‌نسب- امیرحسین برادران- علی بزرگر- علیرضا جباری- مشیم دشتیان- دانیال راستی سیدمحمدرضا روحانی- مریم شیخ‌ممو- شیلا شیرزادی- پوریا علاقه‌مند- مصطفی کیانی- محمود منصوری امیراحمد میرسعیدسیده‌ملیحه میرصالحی- مجتبی نکوئیان- محمد نهاوندی‌مقدم
	شیمی	علی افخمی‌نیا- امیرعلی آقاسی‌زاده- محمدرضا پورجاوید- امیر حاتمیان- پیمان خواجوی‌مجد- حمید ذبحی- روزبه رضوانی علی رفیعی- امیرمحمد سعیدی- رضا سلیمانی- هانی سوری- نازنین صدیقی- امیرحسین طیبی- محمد عظیمیان‌زواره روح‌اله علیزاده- حسن عیسی‌زاده- کارو محمدی- رضا مسکن- نورا نوروزی- سیدرحیم هاشمی‌دهکردی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی پایه	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	محمد صحت‌کار کیوان دارابی	محمد صحت‌کار کیوان دارابی	مصطفی کیانی	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	مهدی ملارمضانی سعید خان‌بابایی	مهرداد ملوندی	مهرداد ملوندی	حمید زرین کفش زهره آقامحمدی دانیال راستی	محمدحسن محمدزاده مقدم امیررضا حکمت‌نیا
بازبینی نهایی رتبه های برتر	سهیل تقی‌زاده مهدی بحرکاظمی	مهبد خالتی	مهبد خالتی	کیارش صانعی حسین بصیر ترکمبور	ماهان زواری احسان پنجه‌شاهی
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین برادران	ایمان حسین‌نژاد
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	علیرضا همایون‌خواه	سمیه اسکندری

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح الهزاده
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود برملا)*

اختلاف بین $\frac{۷}{۹}$ و $-\frac{۵}{۹}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$\Rightarrow ۲T = \frac{۱۲}{۹} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳}$$

a برابر نصف دورهٔ تناوب و b دو برابر دورهٔ تناوب است:

$$\Rightarrow b - a = ۲T - \frac{T}{۲} = \frac{۳T}{۲} = ۱$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۲- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

در نقطهٔ B مقدار تابع برای بار دوم در x های مثبت صفر می‌شود:

$$\cos(\pi x - \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow \pi x - \frac{\pi}{۳} = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x_B = \frac{۱۱}{۶} : B(\frac{۱۱}{۶}, ۰)$$

و در نقطهٔ A تابع برای بار دوم در x های مثبت کمترین مقدار می‌شود.

$$\cos(\pi x - \frac{\pi}{۳}) = -۱ \Rightarrow \pi x - \frac{\pi}{۳} = ۳\pi$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{۱۰}{۳} : A(\frac{۱۰}{۳}, -۲)$$

پس فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یکدیگر برابر است با:

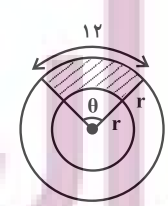
$$|AB| = \sqrt{(\frac{۱۱}{۶} - \frac{۱۰}{۳})^۲ + (-۲-۰)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + ۴} = \frac{۵}{۲}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۳- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

می‌دانیم مساحت قطاع یک دایره با زاویهٔ θ برحسب رادیان برابر است با:

$$S_\theta = \frac{۱}{۲} r^۲ \theta$$



$$\frac{۱}{۲}(۲r)^۲\theta - \frac{۱}{۲}r^۲\theta = \frac{۳}{۲}r^۲\theta = \text{مساحت قسمت هاشورخورده}$$

از طرفی داریم: $۲r\theta = ۱۲ \Rightarrow r\theta = ۶$

زیرا طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ در دایره به شعاع R برابر Rθ است، پس داریم:

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} r \underbrace{(r\theta)}_{۶} = ۵۴ \Rightarrow r = ۶ \Rightarrow \theta = ۱\ \text{rad} = \frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرمحمد باقری نصرآبادی)*

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$۲\sin(\pi + \alpha) = -۲\sin\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$$

پس عبارت صورت سؤال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\alpha}{-۲\sin\alpha + \sin\alpha} = ۴ \Rightarrow \frac{۲\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -۲\cot\alpha = ۴$$
$$\Rightarrow \cot\alpha = -۲$$
$$\tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲}) = -\tan(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cot\alpha = -(-۲) = ۲$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۵- **گزینهٔ «۴»** *(حمید علیزاده)*

$$\frac{\cos(-\frac{۱۷۹\pi}{۶}) + \sin(-\frac{۴۶\pi}{۳})}{\tan\frac{۵\pi}{۸}\cot\frac{۱۱\pi}{۸}}$$

$$= \frac{\cos(\frac{۱۷۹\pi}{۶}) - \sin(\frac{۴۶\pi}{۳})}{\tan(\frac{۴\pi + \pi}{۸})\cot(\frac{۱۲\pi - \pi}{۸})} = \frac{\cos(\frac{۱۸۰\pi - \pi}{۶}) - \sin(\frac{۴۵\pi + \pi}{۳})}{\tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸})\cot(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸})}$$

$$= \frac{\cos(۳۰\pi - \frac{\pi}{۶}) - \sin(۱۵\pi + \frac{\pi}{۳})}{-\cot(\frac{\pi}{۸})\tan(\frac{\pi}{۸})}$$

$$= \frac{\cos(۰ - \frac{\pi}{۶}) - \sin(\pi + \frac{\pi}{۳})}{-۱} = \frac{\cos(\frac{\pi}{۶}) + \sin(\frac{\pi}{۳})}{-۱}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-۱} = -\sqrt{۳}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۶- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۴$ برابر $p(-۴)$ است، پس $p(-۴) = ۲$. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x) = x^۳p(۲x) - ۴x$ بر $x+۲$ برابر $f(-۲)$ است. برای این کار $x = -۲$ را در عبارت $f(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$r = f(-۲) = -۸p(-۴) - ۴(-۲) = -۸\times۲ + ۸ = -۸$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۷- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

چون $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم آن صفر است:

$$P(1)=0 \Rightarrow 1^{10}+a+1=0 \Rightarrow a=-2$$

$$\Rightarrow P(x)=x^{10}-2x+1$$

پس رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است:

$$x^{10}-2x+1=(x-1)Q(x)$$

$$\Rightarrow (x^{10}-1)-2(x-1)=(x-1)Q(x)$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^9+x^8+x^7+...+x+1)-2(x-1)=(x-1)Q(x)$$

$$\Rightarrow Q(x)=x^9+x^8+x^7+...+x+1-2$$

$$=x^9+x^8+x^7+...+x-1$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-1$ برابر $Q(1)$ است که برابر است با:

$$Q(1)=1^9+1^8+...+1-1=9-1=8$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۸- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

شیب خط d_1 برابر $\tan 45^\circ=1$ و شیب خط d_2 برابر $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$ است. بنابراین معادلهٔ این خط‌ها به صورت زیر است.

$$d_1: y-2=(x-4) \Rightarrow y=x-2$$

$$d_2: y-2=-\sqrt{3}(x-4) \Rightarrow y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}+2$$

پس مختصات نقطه‌های A و C به صورت زیر است:

$$x_A=0 \xrightarrow{d_1} y_A=0-2=-2$$

$$y_C=0 \xrightarrow{d_2} 0=-\sqrt{3}x_C+4\sqrt{3}+2 \Rightarrow x_C=\frac{4\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$$

پس شیب خط d_3 که از A و C می‌گذرد، برابر است با:

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-2-0}{0-\frac{4\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)}=\frac{6-\sqrt{3}}{12-1}=\frac{6-\sqrt{3}}{11}$$

بنابراین $\tan\alpha=\frac{6-\sqrt{3}}{11}$ است.

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{5}{2}$ است، پس طبق رابطهٔ صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی داریم:

$$-|a|-1=-\frac{5}{2} \Rightarrow |a|=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{3}{2}$$

پس ضابطهٔ تابع می‌تواند $f(x)=\frac{3}{2}\sin((x+b)\pi)-1$ یا $f(x)=-\frac{3}{2}\sin((x+b)\pi)-1$ باشد. در حالت $a=\frac{3}{2}$، به ازای $x=\frac{11}{6}$ ورودی عبارت سینوس به صورت $2k\pi+\frac{\pi}{2}$ می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{11\pi}{6}+b\pi=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow b=2k-\frac{4}{3}$$

در این حالت مقادیر b به صورت $..., -\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}, ...$ و مقادیر ab به صورت $..., -5, -2, 1, 4, 7, ...$ است. اگر $a=-\frac{3}{2}$ باشد، به ازای $x=\frac{11}{6}$ ورودی عبارت سینوس به صورت $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{11\pi}{6}+b\pi=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow b=2k-\frac{7}{3}$$

در این حالت مقادیر b به صورت $..., -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}, ...$ و مقادیر ab به صورت $..., -\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, ...$ است.

در نتیجه کمترین مقدار مثبت ab برابر $\frac{1}{2}$ است.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۱»** (کاظم اجلالی)

توجه کنید که برای تعریف شدن $\log_{100}x$ لازم است که $x>0$ باشد و برای تعریف نشدن $\tan(\pi\log_{100}^{x})$ لازم است که $\pi\log_{100}x$ مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ شود.

$$\Rightarrow \pi\log_{100}x \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \log_{100}x \neq k+\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq 100^{k+\frac{1}{2}}$$

$$x \neq 10^{2k+1} \Rightarrow D_f=(0,+\infty)-\{x \mid x=10^{2k+1}, k\in\mathbb{Z}\}$$

برای پیدا کردن اعداد شش‌رقمی که در دامنهٔ f نیستند، باید نامعادلهٔ $10^5 \leq 10^{2k+1} < 10^6$ را حل کنیم.

$$5 \leq 2k+1 < 6 \Rightarrow 4 \leq 2k < 5$$

$$2 \leq k < \frac{5}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=2$$

پس فقط یک عدد شش‌رقمی در دامنهٔ تابع f قرار ندارد.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

ریاضی پایه

۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(رضا طاری)*

$$A-B=(-۳\,,\,۲]-[-۲\,,\,۳)=(-۳\,,\,-۲)$$

$$B-A=[-۲\,,\,۳)-(-۳\,,\,۲]=(۲\,,\,۳)$$

پس داریم:

$$(A-B)\cup(B-A)=(-۳\,,\,-۲)\cup(۲\,,\,۳)$$

$$=(-۳\,,\,۳)-[-۲\,,\,۲]$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲ تا ۵)

۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا همهٔ اعداد را برحسب توان‌های ۲ می‌نویسیم:

$$\sqrt[۵]{۲\sqrt{۲}}=۲^{\frac{۱}{۵}}\times ۲^{\frac{۱}{۱۰}}=۲^{\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}}=۲^{\frac{۳}{۱۰}}$$

$$\sqrt{۲\sqrt[۵]{۲}}=۲^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۱۰}}=۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱۰}}=۲^{\frac{۶}{۱۰}}$$

$$\sqrt[۱۰]{۲}=۲^{\frac{۱}{۱۰}}$$

پس در نهایت داریم:

$$A=۲^{\frac{۳}{۱۰}}\times ۲^{\frac{۶}{۱۰}}\times ۲^{\frac{۱}{۱۰}}=۲^{\frac{۳}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}}=۲^{۱}=۲$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۸)

۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(پویان طهرانیان)*

ابتدا دو عدد اولیه را به دست می‌آوریم:

$$a_{۳}=۶\times ۳^{-۱}=۲ \quad \text{و} \quad a_{۷}=۶\times ۳^{-۵}=\frac{۲}{۸۱}$$

پس دنبالهٔ حسابی مورد نظر به صورت زیر است:

$$a_{۳}\,,\,b_{۱}\,,\,b_{۲}\,,\,b_{۳}\,,\,a_{۷}$$

از آنجا که $a_{۳}+a_{۷}=b_{۱}+b_{۳}=۲b_{۲}$ داریم:

$$b_{۱}+b_{۲}+b_{۳}=\frac{۳}{۲}(a_{۳}+a_{۷})$$

$$=\frac{۳}{۲}(۲+\frac{۲}{۸۱})=۳(۱+\frac{۱}{۸۱})=\frac{۸۲}{۲۷}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(حمید علیزاده)*

ابتدا از اتحادها کمک می‌گیریم و عبارت را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A=\frac{(\sqrt[۳]{x^{۲}}-۱)(x\sqrt[۳]{x}+۱+\sqrt[۳]{x^{۲}})}{(x-۱)^{۳}}=\frac{(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۳}-۱}{(x-۱)^{۳}}$$

$$=\frac{x^{۲}-۱}{(x-۱)^{۳}}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)^{۳}}=\frac{(x+۱)}{(x-۱)^{۲}}\xrightarrow{x=\sqrt{۲}+۱}$$

$$A=(\frac{\sqrt{۲}+۱+۱}{(\sqrt{۲}+۱-۱)^{۲}}=\frac{(\sqrt{۲}+۲)}{۲}=۰/۵(۲+\sqrt{۲})$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** *(جهانبخش نیکنام)*

ابتدا مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$a=\sqrt{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{۲}}-\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^{۲}}=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})-(\sqrt{۳}-۱)$$

$$=۱-\sqrt{۲}$$

پس a در بازهٔ $(-۱\,,\,۰)$ قرار دارد و برای چنین اعداد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$-۱<a<a^{۳}<a^{۵}<\ldots<۰<\ldots<a^{۶}<a^{۴}<a^{۲}<۱$$

پس داریم:

$$[a\,,\,a^{۴}]-[a^{۳}\,,\,a^{۲}]=[a\,,\,a^{۳})$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۴۸ تا ۵۳)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(کامیار علّیون)*

ابتدا A را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A=\frac{۲}{\sqrt{\sqrt{۱۸}-۳}\,.\,\sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۳(\sqrt{۲}-۱)}\,.\,\sqrt[۴]{(\sqrt{۲}+۱)^{۲}}}$$

$$\Rightarrow A=\frac{۲}{\sqrt{۳}(\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)})}=\frac{۲}{\sqrt{۳}(\sqrt{۲-۱})}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

در نهایت داریم:

$$B=\sqrt{۱-A^{-۱}}-\sqrt{۱+A^{-۱}}=\sqrt{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}-\sqrt{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow B^{۲}=(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})-۲\sqrt{۱-\frac{۳}{۴}}=۲-۲(\frac{۱}{۲})=۱$$

که با توجه به منفی بودن مقدار B، $B=-۱$ قابل قبول است.

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** (جهانبخش نیکنام)

در دنبالهٔ a_n، سه جملهٔ متوالی داریم:

$$۲(۳a+۱)=۷+۱۵+b \Rightarrow ۶a+۲=۲۲+b$$

$$\Rightarrow ۶a-b=۲۰ \qquad (۱)$$

در دنبالهٔ b_n هم داریم:

$$b_۲+b_{۱۴}=۲b_۸ \Rightarrow ۱۵+a+۷=۲(۳b+۱)$$

$$\Rightarrow ۶b-a=۲۰ \qquad (۲)$$

از معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $a=b=۴$ است. پس دنبالهٔ a_n به صورت $a_n:۷\,,\,۱۳\,,\,۱۹\,,\,...$ است که قدرنسبت آن $d_a=۶$ است. جملات دوم، هشتم و چهاردهم دنبالهٔ b_n نیز به ترتیب ۱۹، ۱۳ و ۷ هستند که در آن قدرنسبت برابر است با:

$$d_b=\frac{۱۳-۱۹}{۸-۲}=-۱ \Rightarrow d_a+d_b=۵$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

مجموع اعداد دستهٔ دوم برابر ۱۳ است، پس دستهٔ سوم ۱۳ عدد دارد که از ۱۱ شروع می‌شود. با توجه به این‌که قدرنسبت دنبالهٔ a_n برابر ۳ است، عدد آخر دستهٔ سوم برابر $۴۷=۳(۱۳-۱)+۱۱$ است، پس دستهٔ سوم به صورت $\{۱۱\,,\,...\,,\,۴۷\}$ است. مجموع اعداد دستهٔ سوم برابر است با:

$$\frac{۱۳}{۲}(۱۱+۴۷)=۱۳\times۲۹=۳۷۷$$

پس دستهٔ چهارم ۳۷۷ عدد دارد که از ۵۰ شروع می‌شود و عدد آخر این دسته برابر $۱۱۷۸=۳(۳۷۷-۱)+۵۰$ است. در نتیجه عدد اول دستهٔ پنجم برابر ۱۱۸۱ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱ تا ۶)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

مجموع m جملهٔ اول دو دنباله را حساب می‌کنیم.

$$۳۲\,,\,۶۴\,,\,۱۲۸\,,\,...$$

$$a_۱=۳۲ \quad , \quad q=۲ \Rightarrow S_m=\frac{a_۱(q^m-۱)}{q-۱}=\frac{۳۲(۲^m-۱)}{۲-۱}$$

$$\frac{۳}{۱۶}\,,\,\frac{۳}{۴}\,,\,۳\,,\,...$$

$$a_۱=\frac{۳}{۱۶} \quad , \quad q=۴ \Rightarrow S'_m=\frac{a_۱(q^m-۱)}{q-۱}=\frac{\frac{۳}{۱۶}(۴^m-۱)}{۴-۱}$$

باید $S_m>S'_m$ باشد:

$$۳۲(۲^m-۱)\geq\frac{۴^m-۱}{۱۶} \Rightarrow ۲^۹(۲^m-۱)>۴^m-۱$$

$$۴^m-۵۱۲\times۲^m+۵۱۱<۰ \Rightarrow (۲^m-۱)(۲^m-۵۱۱)<۰$$

$$۱<۲^m<۵۱۱ \Rightarrow ۱\leq m\leq ۸$$

پس حداکثر مقدار m برابر ۸ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۱ تا ۶)

۲۰- **گزینهٔ «۳»** (کاظم اجلالی)

ابتدا عبارت دوم را شبیه عبارت اول می‌نویسیم:

$$\sqrt{a^۳+a^۲b}-\sqrt{a^۳-۴a^۲b}=۸$$

$$\sqrt{a^۲(a+b)}-\sqrt{a^۲(a-۴b)}=۸ \Rightarrow a\sqrt{a+b}-a\sqrt{a-۴b}=۸$$

$$\sqrt{a+b}-\sqrt{a-۴b}=\frac{۸}{a}$$

حال طرفین تساوی بالا و تساوی $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-۴b}=۵b^۲$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-۴b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-۴b})=۵b^۲\times\frac{۸}{a}$$

$$a+b-(a-۴b)=۴۰\frac{b^۲}{a} \Rightarrow ۵b=۴۰\frac{b^۲}{a} \Rightarrow a=۸b$$

و در تساوی $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-۴b}=۵b^۲$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۸b+b}+\sqrt{۸b-۴b}=۵b^۲ \Rightarrow ۳\sqrt{b}+۲\sqrt{b}=۵b^۲$$

$$b^۲=\sqrt{b} \Rightarrow b^۴=b \xrightarrow{b>۰} b=۱ \xrightarrow{a=۸b} a=۸$$

درنهایت خواسته سوال برابر است با:

$$\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{۸}+\sqrt[۳]{۱}=۲+۱=۳$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷)

هندسه ۳

۲۱- گزینهٔ «۱» (سوگند روشنی)

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4-6}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

از طرفی $mA^{-1}=A+nI$ ، بنابراین:

$$\Rightarrow m\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2m & m\\ \frac{3}{2}m & -\frac{m}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+n & 2\\ 3 & 4+n\end{bmatrix}$$

بنابراین: $m-n=2-(-5)=7$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2m=1+n\Rightarrow -4=n+1\Rightarrow n=-5\\ m=2\end{cases}$$

روش دوم: از قاعدهٔ کیلی همیلتون استفاده می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=(a+d)A-|A|I$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=(1+4)A-(1\times 4-2\times 3)I$$

$$\Rightarrow A^2=5A+2I\xrightarrow{\times A^{-1}}\Rightarrow A=5I+2A^{-1}$$

$$\Rightarrow 2A^{-1}=A-5I\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ n=-5\end{cases}\Rightarrow m-n=7$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۲- گزینهٔ «۲» (کیوان دارابی)

$I+3A$ و $I+KA$ وارون یکدیگرند، بنابراین:

$$(I+3A)(I+KA)=I\Rightarrow I^2+KIA+3AI+3KA^2=I$$

$$\xrightarrow{A^2=A}I+KA+3A+3KA=I$$

$$\Rightarrow KA+3A+3KA=\bar{O}$$

$$\Rightarrow(KI+3I+3KI)A=\bar{O}\xrightarrow{A\neq\bar{O}}4K+3=0\Rightarrow K=-\frac{3}{4}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۳- گزینهٔ «۴» (محمد صحت‌کار)

برای یافتن وارون ماتریس $2A-I$ لازم است که ابتدا آن را در مزدوجش ضرب کنیم:

$$(2A-I)(2A+I)=4A^2-I=4I-I=3I$$

$$(2A-I)(\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}I)=I\Rightarrow(2A-I)^{-1}=\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}I$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{2}{3}\ ,\ \beta=\frac{1}{3}$$

بنابراین: $\alpha\beta=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۴- گزینهٔ «۲» (هومن عقیلی)

$$\xrightarrow{\times A^{-1}}A^3=2A\Rightarrow A^2=2I$$

$$\xrightarrow{\times B^{-1}}B^5=3B\Rightarrow B^4=3I$$

$$(A^{-1})^2+(B^{-1})^4=(A^2)^{-1}+(B^4)^{-1}$$

$$=(2I)^{-1}+(3I)^{-1}=\frac{1}{2}I+\frac{1}{3}I=\frac{5}{6}I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۵- گزینهٔ «۴» (کیوان دارابی)

$$A\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}-5A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}-5I)=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}\times(-\frac{1}{2})\times\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -5\\ 5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=1+2+3+4=10$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۲۶- گزینهٔ «۱» *(جواد ترکمن)*

$$(BAB^{-1})^{8}=BA^{8}B^{-1}$$

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر و هم‌مرتبه باشند داریم:

$$(BAB^{-1})^{n}=BA^{n}B^{-1}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{4-3}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{8}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(BAB^{-1})^{8}=BA^{8}B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 19\\ 1 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15 & 32\\ -8 & 17\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس مورد نظر برابر است با:

$$-15+32-8+17=26$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۷- گزینهٔ «۴» *(کیوان دارابی)*

$$A(A+2I)^{-1}=\frac{1}{5}I\Rightarrow (A(A+2I)^{-1})^{-1}=(\frac{1}{5}I)^{-1}$$

$$\Rightarrow (A+2I)A^{-1}=5I\Rightarrow I+2A^{-1}=5I$$

$$\Rightarrow 2A^{-1}=4I\Rightarrow A^{-1}=2I\Rightarrow A=\frac{1}{2}I\Rightarrow A^{-1}=4A$$

توجه: برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B که وارون‌پذیر نیز هستند، داریم:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۸- گزینهٔ «۳» *(اسحاق اسفندیار)*

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را A بنامیم، آن‌گاه:

$$A\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ 11\end{bmatrix}\xrightarrow{x=3}\begin{bmatrix}3\\ y\end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix}c\\ 11\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -11\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ 11\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}4c-121=3\\ -c+33=y\end{cases}\Rightarrow 4c=124\Rightarrow c=31\Rightarrow y=-31+33=2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۲۹- گزینهٔ «۳» *(هومن عقیلی)*

طبق گفتهٔ مسأله $A=\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ ، $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}12\\ 8\end{bmatrix}$ **و دستگاه فوق یعنی معادلهٔ ماتریسی** $AX=B$.

$$2A_{2\times 2}=\begin{bmatrix}|A| & -4\\ 1 & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow |2A_{2\times 2}|=\begin{vmatrix}|A| & -4\\ 1 & |A|\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 4|A|=|A|^{2}+4\Rightarrow |A|^{2}-4|A|+4=0\Rightarrow |A|=2$$

$$\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=14\\ y=1\end{cases}\Rightarrow x+y=15$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۳۰- گزینهٔ «۱» *(محمد صحت‌کار)*

$$\frac{m-1}{m+2}=\frac{m+3}{m^{2}-2}=\frac{5}{m+6}\Rightarrow (m-1)(m+6)=5(m+2)$$

$$\Rightarrow m^{2}+5m-6=5m+10\Rightarrow m^{2}=16\Rightarrow m=\pm 4$$

اگر $m=4$ آن‌گاه: $\frac{3}{6}=\frac{7}{14}=\frac{5}{10}$

اگر $m=-4$ آن‌گاه: $\frac{5}{2}=\frac{-5}{-2}\neq\frac{-1}{14}$

بنابراین فقط $m=4$ قابل قبول است و خواهیم داشت:

$$\begin{cases}3x+7y=5\\ 6x+14y=10\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 6 & 14\end{bmatrix}\Rightarrow A+I=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 6 & 15\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I|=60-42=18$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۶)

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۲»** (محمد صحت‌کار)

$a = 37q + (q^2 + 23) \Rightarrow 0 \le q^2 + 23 < 37$

$\Rightarrow -23 \le q^2 < 14 \Rightarrow 0 \le q^2 < 14 \Rightarrow -3 \le q \le 3$

q می‌تواند اعداد ۳-، ۲-، ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد بنابراین ۷ عدد صحیح مانند a وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** (محمد صحت‌کار)

$a = 91q + 53 \Rightarrow a = 13(7q) + 53 \Rightarrow a = 13k + 53 = 13k' + 1$

برای k' در تقسیم بر ۳، سه حالت مختلف امکان‌پذیر است:

$k' = 3q$ یا $k' = 3q + 1$ یا $k' = 3q + 2$

بنابراین:

$a = 13(3q) + 1 = 39q + 1$

$a = 13(3q + 1) + 1 = 39q + 14$

$a = 13(3q + 2) + 1 = 39q + 27$

روش دوم: چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳ برابر با ۱ است، کافی است گزینه‌ای را انتخاب کنیم که باقی‌مانده‌اش بر ۱۳ برابر با ۱ نباشد.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۳۳- **گزینهٔ «۱»** (محمد صحت‌کار)

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ بر ۶ برابر با ۱ یا ۵ است. با در نظر گرفتن این‌که $p - q = 2$ می‌توان نتیجه گرفت که p از q بزرگ‌تر است. بنابراین دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

الف) $p = 6k + 1 \Rightarrow q = 6k + 1 - 2 = 6k - 1$

$\Rightarrow pq + 13 = (6k + 1)(6k - 1) + 13$

$= 36k^2 - 1 + 13 = 36k^2 + 12 = 12(3k^2 + 3) = 12k'$

ب) $p = 6k + 5 \Rightarrow q = 6k + 5 - 2 = 6k + 3$

$\Rightarrow q = 3(2k + 1) = 3k'$ غیرقابل قبول

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۳۴- **گزینهٔ «۱»** (کیوان دارابی)

توجه داشته باشید اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و a از b کوچک‌تر باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b همان a خواهد بود. زیرا:

$a = b \times 0 + a \quad , \quad 0 \le a < b$

حال بین دو عدد طبیعی a و b که واضح است یکی نیستند، یکی از دیگری کوچک‌تر است و در تقسیم بر دیگری با باقی‌مانده‌اش مساوی خودش می‌شود. پس یا a برابر با ۱ است و یا b برابر با ۷. البته اگر $a = 1$ آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر a برابر با صفر می‌شود که این‌طور نشده است. بنابراین: $b = 7$ و $a = 7k + 1$. حال کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی a زمانی ساخته می‌شود که $k = 15$.

$a = 7 \times 15 + 1 = 106 \Rightarrow$ رقم یکان $= 6$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

$20a \equiv 28b$ (پیمانهٔ ۷۰) و $(4, 70) = 2 \Rightarrow 5a \equiv 7b$ (پیمانهٔ ۳۵)

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a \equiv 7b \ (\text{پیمانهٔ } 5) \Rightarrow 7b \equiv 0 \ (\text{پیمانهٔ } 5) \Rightarrow b \equiv 0 \ (\text{پیمانهٔ } 5) \\ 5a \equiv 7b \ (\text{پیمانهٔ } 7) \Rightarrow 5a \equiv 0 \ (\text{پیمانهٔ } 7) \Rightarrow a \equiv 0 \ (\text{پیمانهٔ } 7) \end{cases}$$

بنابراین نتیجه‌گیری‌های (الف) و (پ) درست و نتیجه‌گیری‌های (ب) و (ت) نادرست هستند.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

$$\begin{cases} a \overset{24}{\equiv} 3b \Rightarrow a \overset{8}{\equiv} 3b \\ b \overset{40}{\equiv} 3 \Rightarrow b \overset{8}{\equiv} 3 \Rightarrow 3b \overset{8}{\equiv} 9 \end{cases} \Rightarrow a \overset{8}{\equiv} 9 \overset{8}{\equiv} 1 \Rightarrow a = 8k+1$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۳۷- **گزینهٔ «۱»** *(جواد ترکمن)*

$$231 \overset{m}{\equiv} 148 \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid \underbrace{231-148}_{83}$$

$$\xrightarrow[m\neq 1]{m\in\mathbb{N}} m = 83 \Rightarrow m-2 = 81$$

$$\Rightarrow (83-2)! = 81! = 1\times \underbrace{\underline{2}\times \dots \times \underline{41}}_{82}\times \dots \times 81 = 82k \overset{82}{\equiv} 0$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

$$11^2 \overset{40}{\equiv} 1 \Rightarrow (11^2)^{701} \overset{40}{\equiv} 1^{701} \Rightarrow 11^{1402} \overset{40}{\equiv} 1 \Rightarrow 11^{1403} \overset{40}{\equiv} 11$$

$$3^4 \overset{40}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^4)^{350} \overset{40}{\equiv} 1^{350} \Rightarrow 3^{1400} \overset{40}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{1403} \overset{40}{\equiv} 27$$

$$\Rightarrow 11^{1403}+3^{1403} \overset{40}{\equiv} \underbrace{11+27}_{38}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(جواد ترکمن)*

$5^k + 7 \equiv 0$ (پیمانهٔ ۱۱) $\Rightarrow 5^k \equiv -7$ (پیمانهٔ ۱۱)

$\Rightarrow 5^k \equiv -7+11 \equiv 4$ (پیمانهٔ ۱۱)

از طرفی دیگر:

$5^2 \equiv 3$ (پیمانهٔ ۱۱) $\Rightarrow 5^3 \equiv 15 \equiv 4$ (پیمانهٔ ۱۱)

$\Rightarrow 5^4 \equiv 20 \equiv -2$ (پیمانهٔ ۱۱) $\Rightarrow 5^5 \equiv -10 \equiv 1$ (پیمانهٔ ۱۱)

$\Rightarrow 5^{5n} \equiv 1$ (پیمانهٔ ۱۱)

بنابراین:

$$\begin{cases} 5^{5n} \equiv 1 \ (\text{پیمانهٔ } 11) \\ 5^3 \equiv 4 \ (\text{پیمانهٔ } 11) \end{cases} \Rightarrow 5^{5n+3} \equiv 4 \ (\text{پیمانهٔ } 11)$$

پس $k = 5n+3$ است و به ازای $k = 19$ بزرگ‌ترین عدد دو رقمی یعنی ۹۸ به دست می‌آید که باقی‌ماندهٔ تقسیمش بر ۱۱ برابر با ۱۰ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

$$x\in[1]_3 \cap [2]_5 \Rightarrow \begin{cases} x\in[1]_3 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 1 \overset{3}{\equiv} 7 \\ x\in[2]_5 \Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 2 \overset{5}{\equiv} 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \overset{[3,5]}{\equiv} 7 \Rightarrow x \overset{15}{\equiv} 7 \Rightarrow x\in[7]_{15}$$

از طرفی می‌توان به سادگی نشان داد که اگر $x\in[7]_{15}$ آن‌گاه $x\in[1]_3$ و $x\in[2]_5$. بنابراین:

$$[1]_3\cap[2]_5 = [7]_{15}$$

از طرفی x زوج است، یعنی: $x \overset{2}{\equiv} 0$

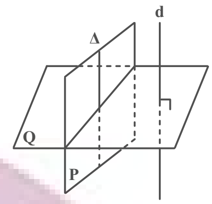
$$\begin{cases} x \overset{2}{\equiv} 0 \overset{2}{\equiv} 22 \\ x \overset{15}{\equiv} 7 \overset{15}{\equiv} 22 \end{cases} \Rightarrow x \overset{[15,2]}{\equiv} 22 \Rightarrow x \overset{30}{\equiv} 22 \Rightarrow x\in[22]_{30}$$

(ریاضیات گسسته- آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

هندسه ۱

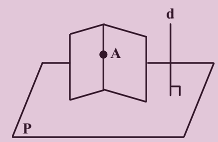
۴۱- گزینهٔ «۱» (مهرداد ملوندی)

مطابق شکل، $d \parallel P$ بوده و خط Δ را از صفحهٔ P موازی d در نظر می‌گیریم. چون $d \perp Q$ پس $\Delta \perp Q$ و در نتیجه صفحهٔ P (که شامل Δ است) بر صفحهٔ Q عمود است.

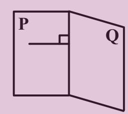


شکل‌های زیر نادرستی سایر گزینه‌ها را نشان می‌دهد.

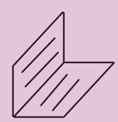
گزینهٔ «۴»:



گزینهٔ «۳»:



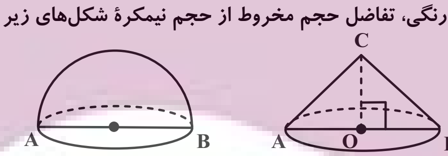
گزینهٔ «۲»:



(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۳)

۴۲- گزینهٔ «۳» (مهرداد ملوندی)

حجم ناحیهٔ رنگی، تفاضل حجم مخروط از حجم نیمکرهٔ شکل‌های زیر است.



$$\begin{cases} \text{حجم نیمکره}: V_1 = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{2\pi}{3}R^3 \\ \text{حجم مخروط}: V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \times R = \frac{\pi}{3}R^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حجم ناحیهٔ رنگی}: V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3}R^3$$

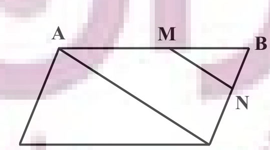
حجم ناحیهٔ رنگی، $\frac{1}{4}$ حجم کره به شعاع R است.

توجه: حجم کره‌ای به شعاع R، برابر $\frac{4}{3}\pi R^3$ است.

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۴۳- گزینهٔ «۴» (افشین خاصه‌خان)

طبق فرض داریم:



$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} MN \parallel AC$$

$$\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{BMN} \sim \overset{\Delta}{BAC} \quad , \quad \frac{BM}{BA} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMN}} = \frac{1}{16} S_{\overset{\Delta}{BAC}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMN}} = \frac{1}{32} S_{ABCD}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها؛ صفحهٔ ۶۵)

۴۴- گزینهٔ «۱» (افشین خاصه‌خان)

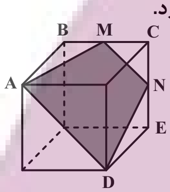
اگر فرض کنیم وجه‌های بالایی و پائینی سبز و وجه‌های مقابل و پشت سر قرمز باشند، آن‌گاه تعداد مکعب‌هایی که فقط دو رنگ قرمز و سبز دارند $n = 4$ است. (دو مکعب در وجه بالایی و دو مکعب در وجه پائینی) همچنین می‌دانیم تعداد مکعب‌هایی که رنگ نشده‌اند برابر است با: $m = 1$

$m + n = 5$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحهٔ ۹۰)

۴۵- گزینهٔ «۴» (مهرداد ملوندی)

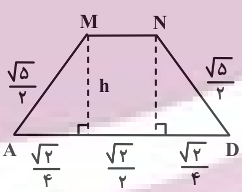
مطابق شکل، برای این‌که صفحهٔ مورد نظر، مکعب را قطع کند و از دو رأس B و C به یک فاصله باشد می‌بایست از نقطهٔ وسط BC (نقطهٔ M) بگذرد. این صفحه از نقطهٔ N (وسط CE) نیز می‌گذرد.



نوع چهارضلعی $AMND$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABM} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AM = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AD = \sqrt{2} \quad , \quad MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{ارتفاع ذوزنقه}: h = \sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

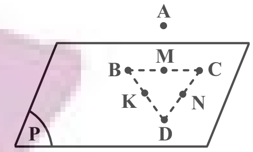
$$\text{مساحت ذوزنقه}: S = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}) \times \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{9}{8}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی؛ صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۴۶- گزینهٔ «۱» (مهرداد ملوندی)

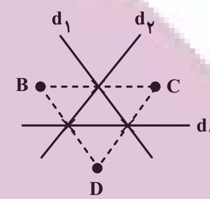
چون هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط قرار ندارند، پس سه نقطهٔ B، C و D تشکیل مثلث می‌دهند. از طرفی A باید در صفحهٔ مثلث $\overset{\Delta}{BCD}$ باشد، چون در غیر این صورت، اگر A خارج صفحهٔ BCD باشد، چهار صفحهٔ گذرا از A می‌توان یافت که سه نقطهٔ B، C و D به فاصلهٔ یکسان از هر یک از آن صفحه‌ها قرار دارند. (یکی صفحهٔ موازی P و گذرا از A و سه تای دیگر، صفحات گذرا از A و دو نقطه از نقاط M، N و P)



در نتیجه گزارهٔ «الف» درست است.

چون هر چهار نقطه هم‌صفحه‌اند، این ۴ نقطه از هر صفحهٔ موازی با صفحهٔ آن‌ها به فاصلهٔ یکسانی قرار دارند. (گزارهٔ «ب» درست است.)

از طرفی مطابق شکل، سه خط d_1، d_2 و d_3 تنها خطوطی در صفحهٔ مثلث BCD هستند که سه نقطهٔ B، C و D از آن‌ها فاصلهٔ یکسانی دارند. از آنجا که نقطهٔ A نمی‌تواند وسط اضلاع BCD باشد (شرط غیر هم‌خط بودن هر سه نقطه در فرض)، پس نقطهٔ A حداکثر روی یکی از این سه خط می‌تواند قرار گیرد. (گزارهٔ «پ» درست است.)



(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(فرزانه خاکپاش)*

حداقل مقدار ممکن برای تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای برابر صفر و حداقل مقدار ممکن برای تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای برابر ۳ است. با توجه به این موضوع داریم:

حالت اول: $b=۳ \Rightarrow i=۱۸-۳=۱۵$

$$S_{max}=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۳}{۲}+۱۵-۱=۱۵/۵$$

حالت دوم: $i=۰ \Rightarrow b=۱۸-۰=۱۸$

$$S_{min}=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۱۸}{۲}+۰-۱=۸$$

بنابراین اختلاف بین حداکثر و حداقل مساحت برابر است با:

$$S_{max}-S_{min}=۱۵/۵-۸=۷/۵$$

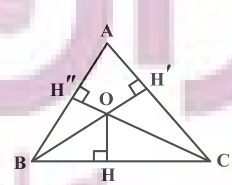
(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

۴۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع در درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر طول ارتفاع مثلث است، پس داریم:

$$h_a=۲+۱+\sqrt{۳}=۳+\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a=۳+\sqrt{۳}$$

مطابق فرض فاصلهٔ نقطهٔ O از ضلع BC، برابر $OH=\sqrt{۳}$ است، بنابراین داریم:

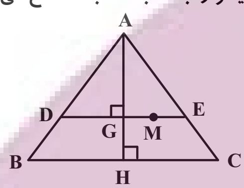


$$S_{OBC}=\frac{۱}{۲}OH\times BC=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳}\times a$$
$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=۳+\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۸)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

پاره‌خط DE موازی ضلع BC رسم شده است، پس طبق قضیهٔ اساسی تشابه، دو مثلث ADE و ABC متشابه‌اند. در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) است. از طرفی می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{ADE}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{AG}{AH}\Rightarrow\frac{DE}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow DE=۲$$

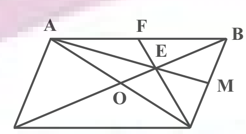
مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است. از طرفی هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین محسوب می‌شود، پس مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر ضلع DE از اضلاع AD و AE، برابر اندازهٔ ارتفاع رسم شده از رأس D در این مثلث است. با توجه به این‌که ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع برابر یکدیگرند، پس این مقدار برابر طول ارتفاع AG، یعنی برابر است با:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}DE=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۲=\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل قطر AC را رسم می‌کنیم. همچنین از C به E وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا AB را در نقطهٔ F قطع کند. پاره‌خط‌های BO، AM و CF میانه‌های مثلث ABC هستند. می‌دانیم از برخورد میانه‌های هر مثلث، شش مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین با فرض $S_{ABC}=S$ داریم:



$$S_{ABE}=S_{EMCO}=\frac{۲}{۶}S_{ABC}=\frac{۱}{۳}S \qquad (۱)$$

از طرفی در مثلث ADC، DO میانهٔ وارد بر ضلع AC است، پس داریم:

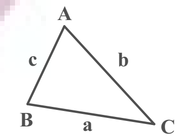
$$S_{OCD}=\frac{۱}{۲}S_{ADC}\xrightarrow{S_{ADC}=S_{ABC}}S_{OCD}=\frac{۱}{۲}S \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{S_{ABE}}{S_{EMCD}}=\frac{\frac{۱}{۳}S}{\frac{۱}{۳}S+\frac{۱}{۲}S}=\frac{\frac{۱}{۳}S}{\frac{۵}{۶}S}=\frac{۲}{۵}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

هندسه ۲

۵۱- گزینهٔ «۲» *(افشین خاصه‌خان)*



طبق فرض داریم:

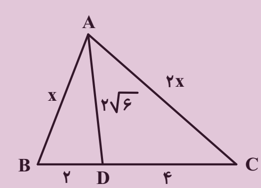
$$10(\frac{1}{2})\cancel{bc}\sin\hat{A}=a\cancel{bc}$$

$$\Rightarrow 5\sin\hat{A}=a\Rightarrow\frac{a}{\sin\hat{A}}=5=2R=5\Rightarrow R=2/5$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۴ و ۷۴)

۵۲- گزینهٔ «۱» *(مهرداد ملوندی)*

با توجه به فرض، ضلع AC را دو برابر ضلع AB در نظر می‌گیریم. برای نیمساز داخلی AD داریم:



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\xrightarrow[BD+DC=6]{AC=2AB}\begin{cases}BD=2\\CD=4\end{cases}$$

طول نیمساز داخلی AD در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$AD^2=AB.AC-BD.DC\Rightarrow(2\sqrt{6})^2=x(2x)-2(4)$$

$$\Rightarrow 2x^2=24+8=32\Rightarrow x=4\Rightarrow\begin{cases}AB=4\\AC=8\end{cases}$$

اگر AM میانهٔ وارد بر ضلع متوسط (BC) باشد، طبق قضیهٔ میانه‌ها داریم:

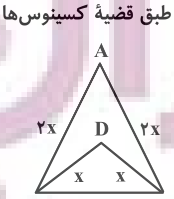
$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 16+64=2AM^2+18\Rightarrow AM=\sqrt{31}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۵۳- گزینهٔ «۲» *(افشین خاصه‌خان)*

B را به C وصل می‌کنیم. طبق قضیهٔ کسینوس‌ها:



$$a^2=x^2+x^2-2x(x).\cos\hat{D}=4x^2+4x^2-2(2x)(2x)\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x^2\cos\hat{D}=8x^2-8x^2\cos\hat{A}$$

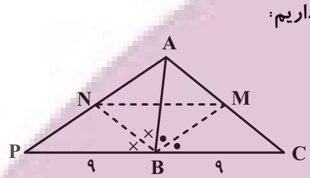
$$2x^2(1-\cos\hat{D})=8x^2(1-\cos\hat{A})\Rightarrow 1-\cos\hat{D}=4-4\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow\cos\hat{D}=4\cos\hat{A}-3$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۵۴- گزینهٔ «۳» *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل BM و BN نیمسازهای زوایای B در دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ABP}$ هستند و داریم:



$$\begin{cases}\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{BC}=\frac{7}{9}\\ \frac{AN}{NP}=\frac{AB}{PB}=\frac{7}{9}\end{cases}\Rightarrow\frac{AM}{MC}=\frac{AN}{NP}=\frac{7}{9}\qquad(*)$$

طبق رابطهٔ (*) و عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که $MN\parallel BC$. حال طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$MN\parallel BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{MN}{PC}=\frac{AM}{AC}=\frac{7}{16}$$

$$\xrightarrow{PC=18}MN=\frac{7\times18}{16}=\frac{63}{8}$$

توجه: $\frac{AM}{MC}=\frac{7}{9}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AM}{AC}=\frac{7}{16}$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۵۵- گزینهٔ «۴» *(فرزانه خاکپاش)*

طبق قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

$$\Rightarrow\frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=2R$$

$$\frac{6}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=2\times3\Rightarrow\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=1$$

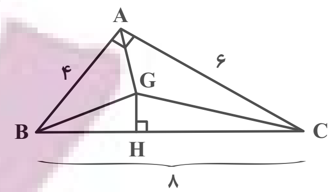
(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۵۶- گزینهٔ «۳» *(سوگند روشنی)*

ابتدا به کمک قضیهٔ هرون، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{4+6+8}{2}=9$$

$$S=\sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)}=\sqrt{9\times1\times3\times5}=3\sqrt{15}$$



می‌دانیم اگر از محل همرسی میانه‌های مثلث به سه رأس آن وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید، پس داریم:

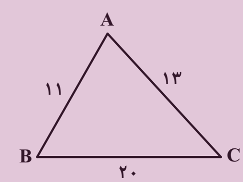
$$S_{GBC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}=\sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}GH\times ۸=\sqrt{۱۵}\Rightarrow GH=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

۵۷- گزینهٔ «۱» *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل فرض کنید $a=۲۰$ ، $b=۱۳$ و $c=۱۱$ باشد. در این صورت طبق قضیهٔ هرون داریم:



$$P=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۲۰+۱۳+۱۱}{۲}=۲۲$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۲۲\times ۲\times ۹\times ۱۱}=۶۶$$

حال طبق رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}bc\,\mathrm{Sin}\,\hat{A}\Rightarrow ۶۶=\frac{۱}{۲}\times ۱۳\times ۱۱\times \sin\hat{A}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ و ۷۴)

۵۸- گزینهٔ «۱» *(فرزانه خاکپاش)*

طبق رابطهٔ طول نیمساز داخلی داریم:

$$AD=\frac{۲bc\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{b+c}\Rightarrow ۲=\frac{۲b\times ۲b\times \cos ۶۰^\circ}{b+۲b}$$

$$\Rightarrow ۲=\frac{۴b^۲\times\frac{۱}{۲}}{۳b}\Rightarrow ۲b^۲=۶b\Rightarrow b^۲-۳b=۰$$

$$\Rightarrow b(b-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}b=۰ & \text{غ ق ق}\\ b=۳\Rightarrow c=۶\end{cases}$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

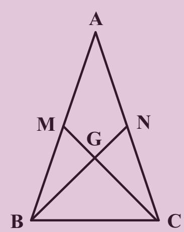
$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}=۳^۲+۶^۲-۲\times ۳\times ۶(-\frac{۱}{۲})$$

$$=۹+۳۶+۱۸=۶۳\Rightarrow a=\sqrt{۶۳}=۳\sqrt{۷}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶، ۷۵ و ۷۶)

۵۹- گزینهٔ «۲» *(امیرحسین ابومحبوب)*

مطابق شکل فرض کنید BN و CM میانه‌های وارد بر دو ساق این مثلث باشند. می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌های وارد بر دو ساق مثلث برابر یکدیگرند، پس $BN=CM$. از طرفی طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$AC^۲+BC^۲=\frac{AB^۲}{۲}+۲CM^۲\Rightarrow ۴^۲+۲^۲=\frac{۴^۲}{۲}+۲CM^۲$$

$$\Rightarrow ۲CM^۲=۱۲\Rightarrow CM=\sqrt{۶}$$

$$\overset{\Delta}{BMG}\ \text{محیط}=BM+GM+BG$$

$$=BM+\frac{۱}{۳}CM+\frac{۲}{۳}BN=BM+\frac{۱}{۳}CM+\frac{۲}{۳}CM$$

$$=\frac{AB}{۲}+CM=۲+\sqrt{۶}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحهٔ ۶۹)

۶۰- گزینهٔ «۲» *(امیرحسین ابومحبوب)*

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲\times CD+AC^۲\times BD=AD^۲\times BC+BD\times DC\times BC$$

$$\Rightarrow x^۲\times ۷+۱۳^۲(x-۲)=۸^۲(x+۵)+۷(x-۲)(x+۵)$$

$$\Rightarrow ۷x^۲+۱۶۹x-۳۳۸=۶۴x+۳۲۰+۷x^۲+۲۱x-۷۰$$

$$\Rightarrow ۸۴x=۵۸۸\Rightarrow x=۷$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحهٔ ۶۹)

فیزیک ۳

۶۱- گزینهٔ «۴» *(دانیال راستی)*

از روی معادلهٔ سرعت- زمان حرکت با شتاب ثابت، شتاب و سرعت اولیهٔ آن را به دست می‌آوریم:

$$v = ۲t - ۴ \xrightarrow{v=at+v_\circ} \begin{cases} a = ۲\dfrac{m}{s^۲} \\ v_\circ = -۴\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

معادلهٔ مکان- زمان را برای حرکت با شتاب ثابت می‌نویسیم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ \xrightarrow[v_\circ=-۴\frac{m}{s}\ ,\ x_\circ=\circ]{a=۲\frac{m}{s^۲}} x = t^۲ - ۴t$$

$$\xrightarrow{\text{حرکت در محور } x} \vec{x} = (t^۲ - ۴t)\,\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۲- گزینهٔ «۴» *(مصطفی کیانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ اگر تندی متحرک افزایش یابد، شتاب متحرک می‌تواند افزایش یا کاهش پیدا کند و یا این که ثابت باشد.

۲) نادرست؛ در هر دو نوع حرکت تندشونده و کندشونده، علامت شتاب می‌تواند مثبت باشد. علامت شتاب به تنهایی نوع حرکت را تعیین نمی‌کند.

۳) نادرست؛ اگر سرعت منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، اما نوع حرکت آن به علامت شتاب بستگی دارد. در صورتی نوع حرکت کندشونده است که $v < \circ$ و $a > \circ$ باشد.

۴) درست؛ اگر متحرک از حال سکون حرکت کند، الزاماً نوع حرکت آن تندشونده است. چون در حرکت تندشونده سرعت و شتاب هم‌علامت‌اند، لذا در هر لحظه جهت سرعت و شتاب یکسان خواهد بود. بنابراین، جهت حرکت که همان جهت سرعت می‌باشد، به علامت شتاب بستگی دارد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۳- گزینهٔ «۲» *(مریم شیخ‌ممو)*

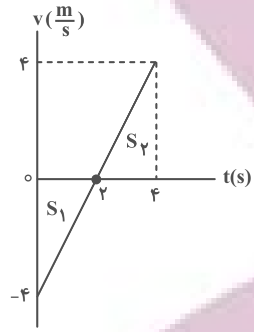
بنابه رابطهٔ $x = t^۲ - ۴t + ۶$، $v_\circ = -۴\frac{m}{s}$ و $\frac{۱}{۲}a = ۱\frac{m}{s^۲}$ است.

بنابراین، چون $v_\circ < \circ$ و $a > \circ$ است، در ابتدا نوع حرکت کندشونده است. لذا با نوشتن معادلهٔ سرعت- زمان متحرک، لحظهٔ تغییرجهت متحرک و سرعت آن را در لحظهٔ $t = ۴s$ می‌یابیم:

$$v = at + v_\circ \xrightarrow[v_\circ=-۴\frac{m}{s}]{\frac{۱}{۲}a=۱\Rightarrow a=۲\frac{m}{s^۲}} v = ۲t - ۴$$

$$\begin{cases} v = \circ \Rightarrow \circ = ۲t - ۴ \Rightarrow t = ۲s \\ t = ۴s \Rightarrow v = ۲\times۴ - ۴ = ۴\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

اکنون نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم و با استفاده از مساحت سطح بین نمودار $v - t$ و محور t، مسافت طی شده را حساب می‌کنیم.



$$\ell = |S_۱| + S_۲ = |\frac{-۴\times۲}{۲}| + \frac{۴\times(۴-۲)}{۲} \Rightarrow \ell = ۴ + ۴ = ۸m$$

روش دوم: بدون رسم نمودار به صورت زیر مساحت را می‌یابیم. البته لحظهٔ تغییر جهت را باید مانند قسمت اول به دست آوریم:

$$x = t^۲ - ۴t + ۶ \Rightarrow \begin{cases} t = \circ \Rightarrow x_\circ = \circ - \circ + ۶ = ۶m \\ t = ۲s \Rightarrow x_۱ = ۴ - ۸ + ۶ = ۲m \\ t = ۴s \Rightarrow x_۲ = ۱۶ - ۱۶ + ۶ = ۶m \end{cases}$$

$$\ell = |x_۱ - x_\circ| + |x_۲ - x_۱| \Rightarrow \ell = |۲ - ۶| + |۶ - ۲| = ۸m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

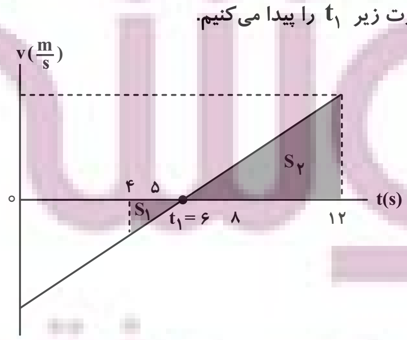
۶۴- گزینهٔ «۴» *(محمد نهاوندی‌مقدم)*

ابتدا با استفاده از رابطه‌های تندی متوسط و سرعت متوسط، مسافت و جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱۲-۴=۸s]{S_{av}=۱\circ\frac{m}{s}} ۱\circ = \frac{\ell}{۸} \Rightarrow \ell = ۸\circ m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۸s]{v_{av}=۸\frac{m}{s}} ۸ = \frac{\Delta x}{۸} \Rightarrow \Delta x = ۶۴m$$

می‌بینیم اختلاف مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر $۸\circ - ۶۴ = ۱۶m$ است که نشان می‌دهد متحرک ابتدا $\frac{۱۶}{۲} = ۸m$ در خلاف جهت محور حرکت می‌کند و سپس تغییر جهت می‌دهد و $۸ + ۶۴ = ۷۲m$ در جهت محور جابه‌جا می‌شود. بنابراین، با رسم نمودار سرعت- زمان در بازه‌های زمانی مورد نظر و استفاده از تشابه مثلث‌های رنگ شده، به صورت زیر $t_۱$ را پیدا می‌کنیم.



$$\frac{S_2}{S_1}=(\frac{12-t_1}{t_1-4})^2 \xrightarrow[S_1=8]{S_2=72} \frac{72}{8}=(\frac{12-t_1}{t_1-4})^2$$

$$\Rightarrow 3=\frac{12-t_1}{t_1-4}\Rightarrow t_1=6s$$

اکنون با استفاده از تشابه مثلث‌ها، مساحت مثلث‌هایی را که قاعدهٔ آن‌ها (۶s تا ۸s) و (۵s تا ۶s) است، می‌یابیم:

$$\frac{S_1}{S'_1}=(\frac{6-4}{6-5})^2\Rightarrow \frac{8}{S'_1}=4\Rightarrow S'_1=2m$$

$$\frac{S_1}{S'_2}=(\frac{6-4}{8-6})^2 \xrightarrow{S_1=8m} \frac{8}{S'_2}=1\Rightarrow S'_2=8m$$

در آخر، مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell=|S'_1|+|S'_2|=2+8=10m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۵- گزینهٔ «۴» (سیدمحمدرضا روحانی)

خودرو در ابتدا در مکان x_1 قرار دارد و راننده مانع را می‌بیند. بعد از یک ثانیه در مکان x_2، راننده ترمز می‌کند. خودرو در $x=0$ که مانع قرار دارد به توقف کامل می‌رسد. حرکت از x_1 تا x_2 با سرعت ثابت است.

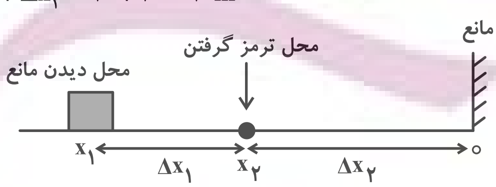
$$v_0=\frac{\Delta x_1}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=1s]{v_0=72\frac{km}{h}=20\frac{m}{s}} 20=\frac{\Delta x_1}{1}\Rightarrow \Delta x_1=20m$$

حرکت از x_2 تا مبدأ مکان (محل قرارگیری مانع) با شتاب ثابت $a=-10\frac{m}{s^2}$ می‌باشد. طبق معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی داریم:

$$v_1^2-v_0^2=2a\Delta x_2 \xrightarrow[a=-10\frac{m}{s^2}]{v_0=20\frac{m}{s}\ ,\ v_1=0}$$

$$-(20)^2=2\times(-10)\times(\Delta x_2)\Rightarrow \Delta x_2=20m$$

$$\Delta x_1+\Delta x_2=20+20=40m$$



(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۶- گزینهٔ «۳» (محمود منصوری)

با توجه به رابطهٔ $\Delta x=(\frac{v_0+v}{2})\Delta t$ خواهیم داشت:

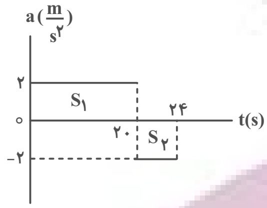
$$\Delta x=(\frac{v_0+v}{2})\Delta t \xrightarrow[\Delta x=188-(-2)=190m]{v_0=5\frac{m}{s}\ ,\ \Delta t=5-0=5s}$$

$$190=(\frac{5+v}{2})\times5\Rightarrow 5+v=76\Rightarrow v=71\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۶۷- گزینهٔ «۲» (میراحمد میرسعید)

ابتدا سرعت اولیه را محاسبه می‌کنیم، سپس نمودار سرعت- زمان را رسم می‌نماییم. با توجه به این‌که مساحت زیر نمودار شتاب- زمان، برابر تغییرات سرعت است، داریم:



$$\Delta v=v_{(t=24s)}-v_0=S_1-S_2 \xrightarrow[v_{(t=24s)}=12\frac{m}{s}\ ,\ S_2=4\times2]{S_1=20\times2}$$

$$12-v_0=40-8\Rightarrow v_0=-20\frac{m}{s}$$

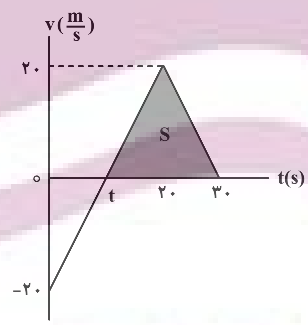
برای رسم نمودار سرعت- زمان، سرعت در لحظات $t=20s$ و $t=30s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_{(t=20s)}=v_0+a_1(20-0)\xrightarrow[v_0=-20\frac{m}{s}]{a_1=2\frac{m}{s^2}} v_{(t=20s)}=20\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=30s)}=v_{(t=20s)}+a_2(30-20)$$

$$\xrightarrow{a_2=-2\frac{m}{s^2}\ ,\ v_{(t=20s)}=20\frac{m}{s}} v_{(t=30s)}=0$$

با توجه به تشابه مثلث‌ها، $t=10s$ است. جابه‌جایی از $t=10s$ تا $t=30s$ برابر با مساحت S می‌باشد. داریم:

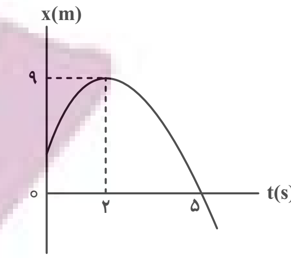


$$v_{av}=\frac{S}{30-10}=\frac{\frac{20\times20}{2}}{20}=10\frac{m}{s}\Rightarrow \vec{v}_{av}=10\frac{m}{s}\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۸- گزینهٔ «۳» (میثم رشتیان)

می‌دانیم هنگام عبور متحرک از نقطهٔ $x=0$ جهت بردار مکان عوض می‌شود. پس برای یافتن این لحظه و نیز درک بهتر از حرکت متحرک، نمودار مکان- زمان آن را رسم می‌کنیم:



$t = 0 \Rightarrow x_0 = 5m$

$$x = 0 \Rightarrow -t^2 + 4t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1s \\ t_2 = 5s \end{cases}$$

$$t_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2s$$

$$t = 2s \xrightarrow{\text{در معادله}} x = 9m$$

طبق نمودار رسم شده، در لحظهٔ $t = 5s$ متحرک از مبدأ مکان گذر کرده و در این لحظه جهت بردار مکان عوض خواهد شد. (دقت داشته باشید که در لحظهٔ $t = 2s$ جهت بردار سرعت تغییر می‌کند نه جهت بردار مکان) پس بازهٔ مدنظر سؤال بازهٔ $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ بوده است.

$$\begin{cases} t_1 = 5s \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 10s \xrightarrow{\text{در معادله}} x_2 = -55m \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر جهت نداریم}} \ell = |\Delta x| = |x_2 - x_1| = 55m$$

$$S_{av[5\,,\,10]} = \frac{\ell_{[5\,,\,10]}}{\Delta t} = \frac{55}{5} = 11\frac{m}{s}$$

راه دوم: با توجه به این‌که پس از لحظهٔ $t = 2s$ تغییر جهت نداریم بنابراین تندی متوسط در بازهٔ زمانی $t = 5s$ تا $t = 10s$ با بزرگی سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است:

$$S_{av} = |v_{av}| = \left|\frac{v_{5s} + v_{10s}}{2}\right| \xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2}]{v_{5s}=3a\ ,\ v_{10s}=8a}$$

$$S_{av} = \frac{22}{2} = 11\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین برادران)*

در حرکت شتاب ثابت جابه‌جایی‌های متوالی در بازه‌های زمانی یکسان تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند که قدرنسبت تصاعد aT^2 است.

$$\begin{array}{cccc} & \Delta x_1 & \Delta x_1 + aT^2 & \Delta x_1 + 2aT^2 \\ 0 & T & 2T & 3T \end{array}$$

$$\Delta x_{T-3T} = (\Delta x_1 + aT^2) + (\Delta x_1 + 2aT^2) = 2\Delta x_1 + 3aT^2$$

$$\Delta x_{0-T} = \Delta x_1$$

$$\frac{(\Delta x_{T-3T})}{(\Delta x_{0-T})} = 5 \Rightarrow \frac{2\Delta x_1 + 3aT^2}{\Delta x_1} = 5$$

$$\Delta x_1 = aT^2$$

با استفاده از رابطهٔ مکان- زمان در حرکت شتاب ثابت، سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}aT^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x_1 = aT^2]{\Delta x = \Delta x_1\ ,\ t = T}$$

$$aT^2 = \frac{1}{2}aT^2 + v_0 T \Rightarrow v_0 = \frac{aT}{2}$$

اکنون سرعت متحرک را در لحظهٔ $5T$ به دست می‌آوریم:

$$v = v_0 + at \xrightarrow{v_0 = \frac{aT}{2}\ ,\ t = 5T} v = \frac{11aT}{2} \Rightarrow \frac{v}{v_0} = 11$$

راه‌حل دوم: در حرکت شتابدار، سرعت متوسط در یک بازه، برابر با سرعت در لحظهٔ وسط بازه است.

$$\Delta x_{(\text{۰ تا } T)} = \Delta t \times v_{av\,(\text{۰ تا } T)} = T \times v_{(\frac{T}{2})}$$

$$\Delta x_{(T \text{ تا } 3T)} = \Delta t \times v_{av(T \text{ تا } 3T)} = (3T - T) \times v_{(2T)}$$

$$\frac{\Delta x_{(\text{۰ تا } T)}}{\Delta x_{(T \text{ تا } 3T)}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{T \times v(\frac{T}{2})}{2T \times v_{(2T)}} = \frac{1}{5} \xrightarrow[v_{(2T)} = v_0 + 2aT]{v_{(\frac{T}{2})} = v_0 + a\frac{T}{2}}$$

$$\frac{v_0 + \frac{aT}{2}}{v_0 + 2aT} = \frac{2}{5} \Rightarrow v_0 = \frac{aT}{2}$$

اکنون سرعت در لحظهٔ $t = 5T$ را به دست می‌آوریم:

$$v = v_0 + at \xrightarrow[v_0 = \frac{aT}{2}]{t = 5T} v_{(5T)} = \frac{11}{2}aT \Rightarrow \frac{v_{(5T)}}{v_0} = 11$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

در بازهٔ زمانی $(0 - 10s)$، حرکت متحرک با سرعت ثابت می‌باشد. یعنی نمودار مکان- زمان آن خط راست باشیب منفی است.

$$(0 - 10s): x = vt + x_0 \xrightarrow[v = -8\frac{m}{s}]{x_0 = 0} x = -8t$$

$$\xrightarrow{t = 10} x = -80m$$

در بازهٔ زمانی $(10s - 14s)$ نوع حرکت متحرک شتابدار با شتاب ثابت است، داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - (-8)}{14 - 10} = 2\frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$x = t^2 - 8t - 80 \xrightarrow{t = 4s} x = 16 - 32 - 80 = -96m$$

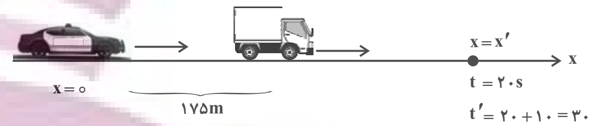
چون پس از لحظهٔ $t = 10s$ شتاب مثبت است بنابراین تقعر منحنی به سمت بالاست و مکان آن در لحظهٔ $14s$ برابر $-96m$ است.

نکته: دقت کنید سرعت و مکان در پایان هر بازهٔ زمانی؛ سرعت اولیه و مکان اولیه بازهٔ بعدی است. در این سؤال بازهٔ زمانی $(10s - 14s)$ طول بازهٔ زمانی $4s$ می‌باشد و باید این عدد در رابطهٔ مکان- زمان جایگذاری شود.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

گام اول: فرض می‌کنیم حرکت روی محور x است و مبدأ محور را محل شروع حرکت خودروی پلیس در نظر می‌گیریم. اگر زمان حرکت خودروی پلیس را با t نشان دهیم، زمان حرکت کامیون که $10s$ زودتر حرکت خود را شروع کرده، $t' = t + 10s$ خواهد بود.



گام دوم: وقتی دو متحرک به هم می‌رسند می‌توانیم معادلهٔ مکان آن‌ها را مساوی با هم قرار دهیم و شتاب حرکت خودروی پلیس را به دست آوریم:

خودروی پلیس: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

$$\xrightarrow[t=20s]{v_0=0,\ x_0=0} x = \frac{1}{2}a(20)^2 \Rightarrow x = 200a$$

کامیون: $x' = \frac{1}{2}a't'^2 + v'_0 t' + x'_0$

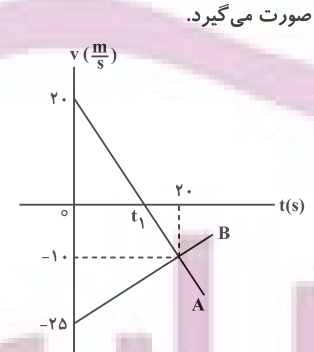
$$\xrightarrow[t'=30s,\ x'_0=175m]{a'=0/5\frac{m}{s^2},\ v'_0=0} x' = \frac{1}{2}\times 0/5 \times 30^2 + 175 = 400m$$

$$x = x' \Rightarrow 200a = 400 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۲- **گزینهٔ «۲»** *(شیلا شیرزادی)*

متحرک A تا لحظهٔ t_1 در جهت محور x حرکت می‌کند (چون در این مدت نمودار سرعت- زمان بالای محور زمان است و سرعت مثبت است). از طرفی چون نمودار سرعت- زمان آن یک خط راست مورب است پس حرکت A با شتاب ثابت صورت می‌گیرد.



شیب نمودار $A = a_A = \frac{v_{20} - v_{0A}}{20 - 0} = \frac{-10 - 20}{20} = -\frac{30}{20} = -1/5\frac{m}{s^2}$

حال زمان t_1 را از روی معادلهٔ سرعت- زمان حساب می‌کنیم:

$$v_A = a_a t_1 + v_{0A} \Rightarrow 0 = -1/5t_1 + 20$$

$$\Rightarrow 1/5t_1 = 20 \Rightarrow t_1 = \frac{20}{1/5} = \frac{40}{3}s$$

از طرفی حرکت B نیز با شتاب ثابت است، پس:

$$a_B = \frac{v_{20} - v_{0B}}{20 - 0} = \frac{-10-(-25)}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t_1^2 + v_{0B}t_1 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times(\frac{40}{3})^2 + (-25)(\frac{40}{3})$$

$$= \frac{200}{3} - \frac{1000}{3} = -\frac{800}{3}m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۳- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

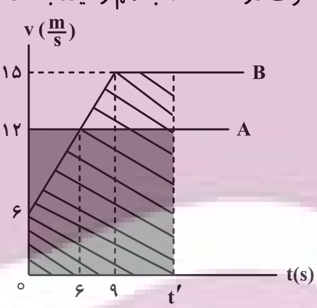
ابتدا شتاب متحرک B در ۶ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12-6}{6-0} = 1\frac{m}{s^2}$$

این شتاب تا لحظهٔ $t = 9s$ برقرار است، پس سرعت متحرک B در لحظهٔ $t = 9s$ به دست می‌آید:

$$v_B = at + v_0 \xrightarrow[v_0=6\frac{m}{s}]{a=1\frac{m}{s^2},\ t=9s} v_B = 1\times 9 + 6 = 15\frac{m}{s}$$

دقت کنید، با استفاده از رابطهٔ تالس در تشابه مثلث‌ها نیز می‌توان سرعت v_B را به دست آورد. چون حرکت دو متحرک، هم‌زمان و از یک نقطه شروع شده است، بنابراین وقتی به هم می‌رسند جابه‌جایی یکسانی دارند. با فرض این‌که دو متحرک در لحظهٔ t' به هم رسیده باشند، داریم:



در آخر، مساحت سطح بین نمودار $v - t$ را که برابر جابه‌جایی دو متحرک است، تا لحظهٔ t' با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \xrightarrow{S_A = S_B} 12t' = \frac{(6+15)\times 9}{2} + (t'-9)15$$

$$\Rightarrow 12t' = 94/5 + 15t' - 135 \Rightarrow 40/5 = 3t' \Rightarrow t' = 13/5s$$

نکته: تا لحظهٔ $t = 9s$، جابه‌جایی متحرک A بیشتر از B است، بنابراین، دو متحرک الزاماً پس از $t = 9s$ به هم می‌رسند.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۴- **گزینهٔ «۱»** *(مهران اسماعیلی)*

ابتدا با استفاده از معادلات سرعت و مستقل از شتاب، سرعت اولیه و شتاب متحرک A را محاسبه کرده و معادلهٔ مکان متحرک A را می‌نویسیم.

$$x = \frac{v+v_0}{2}t + x_0 \xrightarrow[v=0,\ t=8]{x_0=2m,\ x=18m} 18 = \frac{0+v_0}{2}\times 8 + 2$$

$$\Rightarrow v_0 = 4\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=4\frac{m}{s}]{v=0\ ,\ t=8s} 0 = a\times 8 + 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow[x_0=2m]{a=-\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}\ ,\ v_0=4\frac{m}{s}}$$

$$x = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})t^2 + 4t + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 2$$

حال با قرار دادن مکان به هم رسیدن دو متحرک $(x = 17m)$ در معادلهٔ مکان، زمان به هم رسیدن را محاسبه می‌کنیم.

$$17 = -\frac{1}{4}t^2 + 4t + 2 \Rightarrow t^2 - 16t + 60 = 0$$

$$\Rightarrow (t-6)(t-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6s \\ t = 10s \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

با توجه به این‌که زمان به هم رسیدن دو متحرک بعد از لحظهٔ $t = 8s$ است، لحظهٔ $t = 10s$ قابل قبول است. حال با توجه به نمودار متحرک B که دارای حرکت یکنواخت است، معادلهٔ مکان متحرک B را نوشته و تندی متحرک B را محاسبه می‌کنیم.

$$x = v_Bt + x_0 \xrightarrow[t=10s]{x=17m\ ,\ x_0=-3m} 17 = v_B\times 10 - 3$$

$$\Rightarrow v_B = 2\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** (عبدالرضا امینی‌نسب)

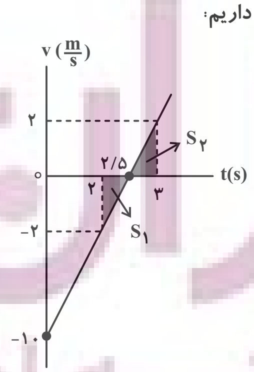
با مقایسهٔ معادلهٔ مکان- زمان با معادلهٔ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = 2 \\ v_0 = -10\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4\frac{m}{s^2} \\ v_0 = -10\frac{m}{s} \end{cases}$$

آن‌گاه معادلهٔ سرعت- زمان به صورت زیر است:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4t - 10 = 0 \Rightarrow t = 2/5s$$

با رسم نمودار $v - t$ داریم:



$$\begin{cases} t = 2s : v = 4\times 2 - 10 = -2\frac{m}{s} \\ t = 3s : v = 4\times 3 - 10 = 2\frac{m}{s} \end{cases}$$

در نمودار $v - t$، سطح محصور بین نمودار و محور افقی (زمان) برابر با مسافت طی شده متحرک است.

$$\ell = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۶- **گزینهٔ «۲»** (علی برزگر)

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ لحظهٔ تغییر جهت متحرک $t = 5s$ است. (علامت سرعت قبل و بعد از این لحظه تغییر کرده است.)

ب) نادرست؛ متحرک ابتدا در بازهٔ زمانی صفر تا $5s$، در جهت محور x و در بازهٔ زمانی ($5s$ تا $20s$) در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.

پ) نادرست؛ نوع حرکت در این بازهٔ زمانی کندشونده است.

ت) نادرست؛ نوع حرکت در این بازهٔ زمانی تندشونده است.

ث) درست؛ شیب خط در نمودار سرعت- زمان برابر شتاب متحرک است. چون شیب نمودار در ۱۰ ثانیهٔ اول منفی است، بنابراین شتاب در این بازهٔ زمانی خلاف جهت محور x است.

ج) درست؛ شتاب متحرک در نمودار $v - t$ برابر شیب نمودار است. چون در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه یک خط راست است، پس شیب آن ثابت بوده و شتاب حرکت در کل این بازهٔ زمانی یکسان و ثابت است.

چ) درست؛ شتاب لحظه‌ای متحرک در نمودار $v - t$ برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه است پس کافی است شیب دو خط نمودار را به دست آوریم.

$$|a_{t=8s}| = |\text{شیب خط اول نمودار}| = \left|\frac{-20-20}{10}\right| = 4\frac{m}{s^2}$$

$$|a_{t=12s}| = |\text{شیب خط دوم نمودار}| = \left|\frac{0-(-20)}{10}\right| = 2\frac{m}{s^2}$$

$$\left|\frac{a_{t=8s}}{a_{t=12s}}\right| = 2$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۷- **گزینهٔ «۱»** (سیده‌ملیحه میرصالحی)

جهت مثبت محور y را بالا انتخاب می‌کنیم. ابتدا سرعت متحرک را در نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_Bt \xrightarrow[t=4s]{\Delta y=-100m} -100 = -5\times 16 + v_B\times 4$$

$$\Rightarrow v_B = -5\frac{m}{s}$$

اکنون سرعت گلوله را ۳ ثانیه قبل از برخورد با زمین به دست می‌آوریم.

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+vt \xrightarrow[t=3s]{\Delta y=-120m} -120=-5\times 9+v\times 3$$

$$v=-25\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت برخورد گلوله با زمین برابر است با:

$$v=-gt+v_0 \xrightarrow[v_0=-25\frac{m}{s}]{t=3s\ ,\ g=10\frac{m}{s^2}} v_{\text{برخورد با زمین}}=-55\frac{m}{s}$$

به کمک معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌توان فاصلهٔ نقطهٔ B تا سطح زمین را به دست آورد:

$$v^2-v_B^2=-2g\Delta y \xrightarrow[v_B=-5\frac{m}{s}]{v=-55\frac{m}{s}} 3025-25=-20\times\Delta y$$

$$\Rightarrow \Delta y=-150m \Rightarrow 150-100=50m$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ C تا سطح زمین $50m$ است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمود منصوری)*

با توجه به این‌که جسم رها می‌شود $(v_0=0)$ خواهیم داشت:

$$v^2-v_0^2=2gh \Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$

در $\frac{8}{9}h$، مسیر طی شده $\frac{h}{9}$ و در $\frac{3}{4}h$، مسیر طی شده $\frac{h}{4}$ می‌باشد:

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{9}h}{\frac{1}{4}h}}=\frac{2}{3}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۹- **گزینهٔ «۴»** *(شیلا شیرزادی)*

فرض می‌کنیم مدت سقوط جسم اول t باشد، پس مدت سقوط را از معادلهٔ $h=\frac{1}{2}gt^2$ به دست می‌آوریم:

$$180=5t^2 \Rightarrow t^2=\frac{180}{5}=36 \Rightarrow t=6s$$

حال همین رابطه را برای جسم دوم می‌نویسیم و فرض می‌کنیم مدت زمان سقوطش t' باشد:

$$h'=\frac{1}{2}gt'^2 \Rightarrow 80=5t'^2 \Rightarrow t'^2=\frac{80}{5}=16 \Rightarrow t'=4s$$

با کم کردن t و t' از یکدیگر می‌توانیم حساب کنیم که جسم دوم چند ثانیه بعد از جسم اول باید رها شود:

$$t''=t-t'=6-4=2s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۸۰- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین برادران)*

با توجه به نمودار مکان- زمان حرکت گلولهٔ A، در ثانیهٔ پایانی ۷۵ متر را طی کرده است، بنابراین با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{\Delta y}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta y=-75m]{\Delta t=1s\ ,\ v_2=v_1-10} \frac{v_1+v_1-10}{2}=-\frac{75}{1}$$

$$\Rightarrow v_1=-70\frac{m}{s} \Rightarrow v_2=-80\frac{m}{s}$$

اکنون ارتفاع اولیه گلولهٔ A و لحظهٔ رسیدن آن به سطح زمین را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_0^2=-2g\Delta y \xrightarrow[v_2=-80\frac{m}{s}]{v_0=0} \Delta y=-\frac{80^2}{20}=-320m$$

$$\Rightarrow h_A=320m \xrightarrow{h_B=h_A-195} h_B=320-195=125m$$

$$t_A=\sqrt{\frac{2h_A}{g}}=8s$$

فاصلهٔ گلولهٔ A از گلولهٔ B در نقطهٔ رها شدن گلولهٔ B

$$=195-\frac{1}{2}\times 10\times 3^2=195-45=150m$$

تندی گلولهٔ A در لحظهٔ رها شدن گلولهٔ B

$$=-gt=-10\times 3=-30\frac{m}{s}$$

اکنون مشخص می‌کنیم گلولهٔ B چند ثانیه پس از رها شدن به سطح زمین می‌رسد.

$$\Delta y_B=-\frac{1}{2}gt_B^2 \xrightarrow[\Delta y_B=-125m]{g=10\frac{m}{s^2}}$$

$$125=\frac{1}{2}\times 10\times t_B^2 \Rightarrow t_B=5s$$

با توجه به این‌که گلولهٔ B سه ثانیه پس از رها شدن گلولهٔ A شروع به حرکت کرده است و از طرفی گلولهٔ A، ۸ ثانیه پس از رها شدن به سطح زمین رسیده است بنابراین گلولهٔ A و B هم‌زمان به سطح زمین می‌رسند و فاصلهٔ آن‌ها پیوسته کاهش می‌یابد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

فیزیک ۱

۸۱- گزینهٔ «۳» *(علی برزگر)*

فقط مؤلفه‌های هم‌راستای نیرو و جابه‌جایی، کار انجام می‌دهند. بنابراین، با توجه به این‌که نیرو در راستای افقی است، صرفاً جابه‌جایی افقی باعث انجام کار می‌شود.

$$W = F d_x \cos\theta \xrightarrow[\cos\theta=1]{F \text{ و } d_x \text{ هم‌جهت}} W = F d_x$$

$$\xrightarrow[d_x=4m]{F=12N} W = 48J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۸۲- گزینهٔ «۱» *(شیلا شیرزادی)*

باید مجموع کار سه نیروی F، اصطکاک و وزن را حساب کنیم:

$$W_t = W_{mg} + W_f + W_F$$

$$W_{mg} = -(U_2 - U_1) \xrightarrow[U_2=mgh]{U_1=0} W_{mg} = -mgh$$

$$\xrightarrow[h=2m]{m=1kg\ ,\ g=10\frac{m}{s^2}} W_{mg} = -20J$$

$$W_f = fd\cos\theta_f \xrightarrow[f=5N\ ,\ d=\frac{2}{\sin 30^\circ}=4m]{\theta_f=180^\circ\ ,\ \cos\theta_f=-1} W_f = -20J$$

$$W_F = Fd\cos\theta_F \xrightarrow[F=20N\ ,\ d=4m]{\theta_F=0\ ,\ \cos\theta_F=1} W_F = 80J$$

$$W_t = -20-20+80 = 40J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰ و ۶۵)

۸۳- گزینهٔ «۲» *(میثم رشتیان)*

اگر از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی برای این جابه‌جایی استفاده کنیم، داریم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\xrightarrow[v_1=v_0\ ,\ v_2=\frac{80}{100}v_1=\frac{4}{5}v_1]{W_t=-360J\ ,\ m=8kg} -360 = \frac{1}{2}\times 8[(\frac{4}{5}v_0)^2 - v_0^2]$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{25}v_0^2 \times 4 = -360 \Rightarrow v_0^2 = 250 \Rightarrow v_0 = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۸۴- گزینهٔ «۴» *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

$$W_t = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow[v_2=0\ ,\ v_1=10\frac{m}{s}]{m=4kg}$$

$$W_t = 0 - \frac{1}{2}\times 4\times(10)^2 = -200J$$

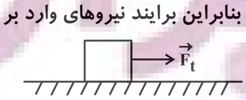
(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۸۵- گزینهٔ «۲» *(امیرحسین برادران)*

با توجه به این‌که نیروهای وارد بر جسم ثابت هستند، بنابراین جسم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. با توجه به مکان متحرک در لحظات t_A، t_B و t_C نتیجه می‌گیریم متحرک ابتدا در خلاف جهت محور x در حال حرکت است و سپس در لحظهٔ t_C در جهت محور x حرکت می‌کند.

چون برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای افق است و سطح بدون اصطکاک است بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم برابر است با:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



بنابراین داریم:

$$W_t = W_{F_t} \xrightarrow{\Delta K=W_t} \Delta K = W_{F_t}$$

$$\xrightarrow[W_{F_t}=F_t(x_B-x_A)]{\Delta K=-42J} -42 = F_t(x_B - x_A)$$

$$\xrightarrow[x_A=10m]{x_B=-26m} -42 = F_t\times(-36) \Rightarrow F_t = \frac{7}{6}N$$

بنابراین کار برایند نیروهای وارد بر جسم از A تا C برابر است با:

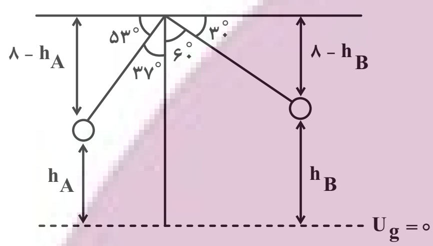
$$W'_{F_t} = F_t\Delta x_{AC} = \frac{7}{6}\times(70-10) = 70J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۸۶- گزینهٔ «۳» *(پوریا علاقه‌مند)*

کار نیروی وزن برابر منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی است. با در نظر گرفتن پایین‌ترین نقطهٔ مسیر حرکت آونگ به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی داریم:

$$W_{mg} = -(U_B - U_A) \xrightarrow[U_B=mgh_B]{U_A=mgh_A} W_{mg} = mg(h_A - h_B)$$



$$8\times\sin 53^\circ = 8 - h_A \xrightarrow[\sin 53^\circ=0.8]{\sin 37^\circ=0.6} h_A = 1.6m$$

$$8\times\sin 30^\circ = 8 - h_B \xrightarrow{\sin 30^\circ=\frac{1}{2}} h_B = 4m$$

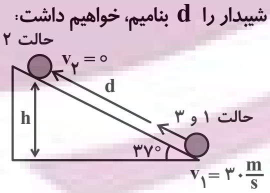
$$W_{mg} = mg(h_A - h_B) \xrightarrow[g=10\frac{m}{s^2}\ ,\ h_A=1.6m\ ,\ h_B=4m]{m=900g=0.9kg}$$

$$W_{mg} = 0.9\times10\times(1.6-4) = -21.6J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۸۷- گزینهٔ «۲» *(محمود منصوری)*

اگر فاصلهٔ نقطهٔ پرتاب تا توقف در امتداد سطح شیبدار را d بنامیم، خواهیم داشت:



$$h = d\sin 37^\circ = d\times 0.6$$

$$E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow mgh - \frac{1}{2}mv_1^2 = fd\cos 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\times10\times(d\times0.6) - \frac{1}{2}\times2\times30^2 = 6\times d\times(-1) \Rightarrow d = 50m$$

$$W_f = fd\cos 180^\circ = 6\times50\times(-1) = -300J$$

نکته: چون نیروی اصطکاک در طول مسیر ثابت است، کار نیروی اصطکاک در رفت و برگشت با هم برابر است. در رفت و برگشت داریم:

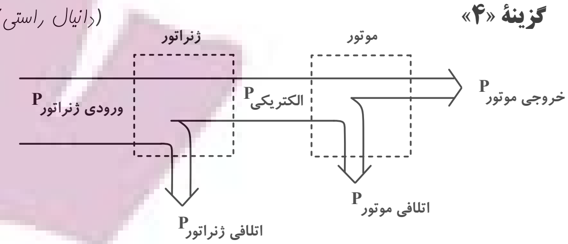
$$E_3 - E_1 = 2W_f \Rightarrow K_3 - K_1 = 2W_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v_3^2 - v_1^2) = 2\times(-300) \Rightarrow \frac{1}{2}\times2\times(v_3^2 - 900) = -600$$

$$\Rightarrow v_3^2 = 300 \Rightarrow v_3 = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** (دانیال راستی)



طرح‌واره ژنراتور و موتور رسم شده است. $P_{\text{الکتریکی}}$، توان خروجی ژنراتور و توان ورودی موتور است. طبق صورت سؤال، توان اتلافی ژنراتور برابر با توان خروجی موتور است. بنابراین:

$$P_{\text{اتلافی ژنراتور}} = P_{\text{خروجی موتور}}$$

$$P_{\text{ورودی ژنراتور}} = P_{\text{الکتریکی}} + P_{\text{اتلافی ژنراتور}}$$

$$\xrightarrow{P_{\text{اتلافی ژنراتور}} = P_{\text{خروجی موتور}}}$$

$$P_{\text{الکتریکی}} = P_{\text{ورودی ژنراتور}} - P_{\text{خروجی موتور}} \qquad (1)$$

$$\eta_{\text{ژنراتور}} = \frac{P_{\text{الکتریکی}}}{P_{\text{ورودی ژنراتور}}} \xrightarrow{(1)}$$

$$\eta_{\text{ژنراتور}} = \frac{P_{\text{ورودی ژنراتور}} - P_{\text{خروجی موتور}}}{P_{\text{ورودی ژنراتور}}}$$

$$\eta_{\text{موتور}} = \frac{P_{\text{خروجی موتور}}}{P_{\text{الکتریکی}}} \xrightarrow{(1)}$$

$$\eta_{\text{موتور}} = \frac{P_{\text{خروجی موتور}}}{P_{\text{ورودی ژنراتور}} - P_{\text{خروجی موتور}}}$$

$$\frac{\eta_{\text{موتور}}}{\eta_{\text{ژنراتور}}} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۴}{۹}\eta_{\text{ژنراتور}} = \eta_{\text{موتور}}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۹}\frac{P_{\text{ورودی ژنراتور}} - P_{\text{خروجی موتور}}}{P_{\text{ورودی ژنراتور}}} = \frac{P_{\text{خروجی موتور}}}{P_{\text{ورودی ژنراتور}} - P_{\text{خروجی موتور}}}$$

صورت و مخرج را به $P_{\text{ورودی ژنراتور}}$ تقسیم می‌کنیم و $\frac{P_{\text{خروجی موتور}}}{P_{\text{ورودی ژنراتور}}}$ را با x نشان می‌دهیم:

$$\Rightarrow \frac{۴}{۹}\,\frac{۱-x}{۱} = \frac{x}{۱-x} \Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۱ = \frac{۹}{۴}x \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

(فیزیک ۱- صفحهٔ ۷۵)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** (مهران اسماعیلی)

ابتدا با داشتن حجم و چگالی آب، جرم آب خروجی در هر ثانیه را محاسبه می‌کنیم:

$$V = ۱۲\,L = ۱۲ \times ۱۰^{-۳}\,m^{۳}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \xrightarrow[V = ۱۲\times ۱۰^{-۳}\,m^{۳}]{\rho = ۱۰۰۰\,\frac{kg}{m^{۳}}}$$

$$m = ۱۰۰۰ \times ۱۲ \times ۱۰^{-۳} = ۱۲\,kg$$

سپس توان مفید پمپ را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{پمپ}} = \eta \times P_{\text{مصرفی}} \xrightarrow[P_{\text{مصرفی}} = ۹kW = ۹۰۰۰W]{\eta = ۰/۸}$$

$$P_{\text{پمپ}} = ۰/۸ \times ۹۰۰۰ = ۷۲۰۰W$$

کار پمپ را در مدت یک ثانیه محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{پمپ}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{t} \xrightarrow[t = ۱s]{P_{\text{پمپ}} = ۷۲۰۰W} ۷۲۰۰ = \frac{W_{\text{پمپ}}}{۱} \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = ۷۲۰۰J$$

حال با توجه به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی تندی خروج آب از لوله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta K = W_t \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_{۰}^{۲} = W_{\text{وزن}} + W_{\text{پمپ}}$$

تندی اولیه آب در ته چاه برابر صفر است $(v_{۰} = ۰)$ و کار وزن آب در جابه‌جایی از ته چاه تا لولهٔ خروجی برابر است با:

$$W_{\text{وزن}} = -mgh \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^{۲} = -mgh + W_{\text{پمپ}}$$

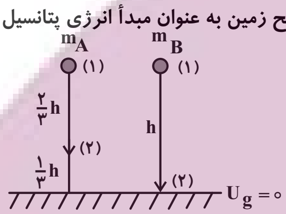
$$\xrightarrow[W_{\text{پمپ}} = ۷۲۰۰J\ ,\ g = ۱۰\frac{N}{kg}]{m = ۱۲kg\ ,\ h = ۳۰m} \frac{۱}{۲} \times ۱۲v^{۲} = -۱۲ \times ۱۰ \times ۳۰ + ۷۲۰۰$$

$$\Rightarrow ۶v^{۲} = ۳۶۰۰ \Rightarrow v^{۲} = ۶۰۰ \Rightarrow v = ۱۰\sqrt{۶}\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا جباری)

با در نظر گرفتن سطح زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی داریم:



گام اول: چون مقاومت هوا ناچیز است، پایستگی انرژی مکانیکی برای هر دو گلوله برقرار است:

$$E_{۱A} = E_{۲A} \quad \text{و} \quad E_{۱B} = E_{۲B}$$

گام دوم: انرژی جنبشی گلولهٔ A را در ارتفاع $\frac{h}{۳}$ از سطح زمین و انرژی جنبشی گلولهٔ B را در لحظهٔ رسیدن به سطح زمین به دست می‌آوریم و نسبت آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$E_{۱A} = E_{۲A} \Rightarrow K_{۱A} + U_{۱A} = K_{۲A} + U_{۲A}$$

$$\xrightarrow{K_{۱A} = ۰} m_A gh = K_{۲A} + m_A g\frac{h}{۳} \Rightarrow K_{۲A} = \frac{۲}{۳}m_A gh$$

$$E_{۱B} = E_{۲B} \Rightarrow K_{۱B} + U_{۱B} = K_{۲B} + U_{۲B}$$

$$\xrightarrow[U_{۲B} = ۰]{K_{۱B} = ۰} m_B gh = K_{۲B}$$

$$\frac{K_{۲B}}{K_{۲A}} = \frac{m_B gh}{\frac{۲}{۳}m_A gh} \xrightarrow{m_B = ۲m_A} \frac{K_{۲B}}{K_{۲A}} = \frac{۲m_A}{\frac{۲}{۳}m_A} = ۳$$

راه‌حل دوم: طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K_A = W_{tA} \xrightarrow[K_{۱A} = ۰\ ,\ W_{tA} = W_{mg\,A}]{\Delta K_A = K_{۲A} - K_{۱A}} K_{۲A} = W_{mg\,A}$$

$$W_{mg\,A} = m_A g d_A \cos\theta_A \xrightarrow[d_A = \frac{۲}{۳}h]{\theta_A = ۰\ ,\ \cos\theta_A = ۱}$$

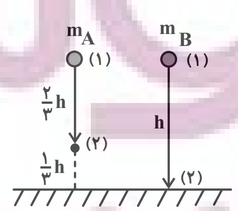
$$K_{۲A} = \frac{۲}{۳}hm_A g$$

$$\Delta K_B = W_{tB} \xrightarrow[K_{۱B} = ۰\ ,\ W_{tB} = W_{mg\,B}]{\Delta K_B = K_{۲B} - K_{۱B}} K_{۲B} = W_{mg\,B}$$

$$W_{mg\,B} = m_B g d_B \cos\theta_B \xrightarrow[d_B = h\ ,\ m_B = ۲m_A]{\theta_B = ۰\ ,\ \cos\theta_B = ۱}$$

$$K_{۲B} = ۲m_A hg$$

$$\Rightarrow \frac{K_{۲B}}{K_{۲A}} = \frac{۲m_A hg}{\frac{۲}{۳}m_A hg} = ۳$$



(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۳»** (مجتبی نکوئیان)

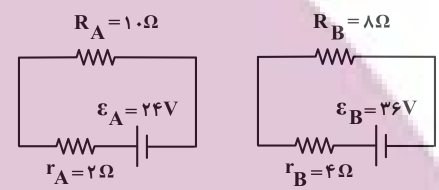
با توجه به رابطهٔ اختلاف پتانسیل دو سر مولد غیرآرمانی (واقعی) برحسب جریان $(V = \varepsilon - rI)$ می‌توان گفت که در نمودار $V - I$، عرض از مبدأ خط، برابر با ε و قدرمطلق شیب خط برابر با r است. پس:

$$r_A = \frac{|\Delta V_A|}{\Delta I_A} = \frac{4}{2} = 2\Omega \Rightarrow r_A = \frac{\varepsilon_A}{12} \Rightarrow \varepsilon_A = 24V$$

$$\varepsilon_A + 12 = \varepsilon_B \xrightarrow{\varepsilon_A = 24V} \varepsilon_B = 36V$$

$$r_B = \frac{36}{9} = 4\Omega$$

از طرفی داریم:



$$I_A = \frac{\varepsilon_A}{R_A + r_A} = \frac{24}{12} = 2A$$

$$I_B = \frac{\varepsilon_B}{R_B + r_B} = \frac{36}{12} = 3A$$

و در نهایت با استفاده از رابطهٔ توان خروجی مولد $(P_{\text{خروجی مولد}} = V_{\text{مولد}} \times I_{\text{مولد}} = (\varepsilon - rI)I)$ می‌توان نوشت:

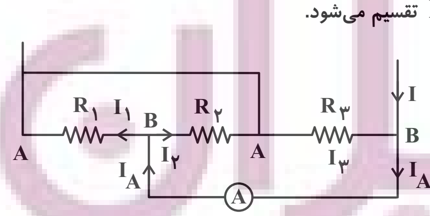
$$\begin{cases} P_{A\ \text{خروجی}} = (24 - 2\times(2))\times(2) = 40W \\ P_{B\ \text{خروجی}} = (36 - 4\times(3))\times(3) = 72W \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_{B\ \text{خروجی}} - P_{A\ \text{خروجی}} = 32W$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۰)

۹۲- **گزینهٔ «۴»** (مهران اسماعیلی)

برای محاسبهٔ نیروی محرکهٔ مولد ε_2 لازم است جریان حلقه (جریان در شاخهٔ اصلی) را محاسبه کنیم. با توجه به نقاط هم‌پتانسیل، مقاومت‌های R_1، R_2 و R_3 موازیند. بنابراین جریان عبوری از آمپرسنج بین دو مقاومت R_1 و R_2 تقسیم می‌شود.



پس می‌توان نوشت:

$$I_A = I_1 + I_2 = 2A$$

با داشتن مجموع جریان‌های مقاومت‌های R_1 و R_2 می‌توان اختلاف پتانسیل دو سر آن‌ها را محاسبه کرد.

$$V_{AB} = R_{1,2}I_{1,2} \xrightarrow[R_{1,2} = \frac{4\times 12}{4+12} = 3\Omega]{I_{1,2} = 2A} V_{AB} = 3\times 2 = 6V$$

با داشتن V_{AB} می‌توانیم جریان عبوری از مقاومت R_3 را نیز محاسبه کنیم.

$$V_{AB} = R_3 I_3 \xrightarrow[V_{AB} = 6V]{R_3 = 6\Omega} 6 = 6I_3 \Rightarrow I_3 = 1A$$

حال می‌توان جریان حلقه را محاسبه کرد. $\quad I = I_A + I_3$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 2 + 1 = 3A$$

با فرض این‌که مولدهای ε_1 و ε_3 محرکه و ε_2 ضد محرکه است، نیروی محرکهٔ مولد ε_2 را محاسبه می‌کنیم که برای این منظور لازم است مقاومت معادل مقاومت‌های موازی R_1، R_2 و R_3 را محاسبه کنیم.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \xrightarrow[R_3 = 6\Omega]{R_1 = 4\Omega\ ,\ R_2 = 12\Omega}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \Rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$

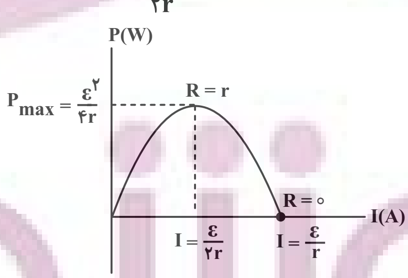
$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{R_{eq} + r_1 + r_2 + r_3} \Rightarrow 3 = \frac{18 + 6 - \varepsilon_2}{2 + 1 + 0/5 + 0/5}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{24 - \varepsilon_2}{4} \Rightarrow 24 - \varepsilon_2 = 12 \Rightarrow \varepsilon_2 = 12V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** (محمود منصوری)

توان خروجی باتری برحسب جریان، یک سهمی با معادلهٔ $P = \varepsilon I - rI^2$ می‌باشد. بیشینهٔ توان از رابطهٔ $P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$ محاسبه می‌گردد و جریانی که به ازای آن، توان بیشینه می‌شود، از رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{2r}$ به دست می‌آید.



$$\left.\begin{array}{l} P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \Rightarrow 18 = \frac{\varepsilon^2}{4r} \\ I = \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow 6 = \frac{\varepsilon}{2r} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{r} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4} \times \frac{\varepsilon}{r} = 18W$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{4} \times 12 = 18W \Rightarrow \varepsilon = 6V \quad , \quad r = 0/5\Omega$$

اگر ولتاژ دو سر باتری ۱/۵ ولت باشد:

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow ۱/۵ = ۶ - ۰/۵I \Rightarrow ۰/۵I = ۴/۵ \Rightarrow I = ۹A$$

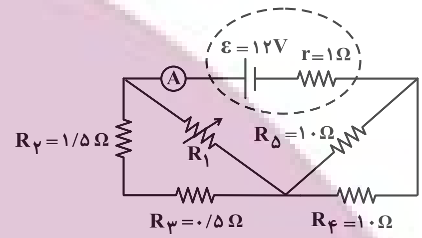
توان خروجی:

$$P_{\text{خروجی}} = VI = ۱/۵ \times ۹ = ۱۳/۵W$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۹۴- گزینهٔ «۱» *(علیرضا جباری)*

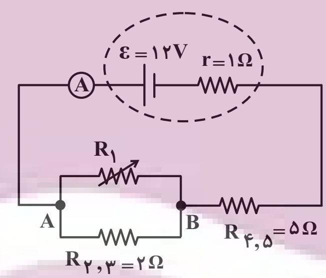
گام اول: ابتدا مدار را به صورت زیر ساده می‌کنیم:



$R_۲$ و $R_۳$ متوالی هستند. $R_{۲,۳} = R_۲ + R_۳ = ۱/۵ + ۰/۵ = ۲\Omega$

$R_۴$ و $R_۵$ موازی هستند. $R_{۴,۵} = \frac{R_۴ \times R_۵}{R_۴ + R_۵} = \frac{۱۰\times۱۰}{۱۰+۱۰} = ۵\Omega$

گام دوم: اگر مقاومت $R_۱$ برابر صفر باشد، مقاومت $R_{۲,۳}$ اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد. مانند آن‌که از A تا B فقط یک قطعه سیم رابط با مقاومت ناچیز قرار گیرد. در این حالت می‌توان نوشت:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow[R_{eq}=R_{۴,۵}=۵\Omega]{\varepsilon=۱۲V\ ,\ r=۱\Omega} I_۱ = \frac{۱۲}{۵+۱} = ۲A$$

گام سوم: اگر مقاومت $R_۱$ برابر بی‌نهایت باشد از آن هیچ جریانی نمی‌گذرد و بین نقاط A و B جریان فقط از $R_{۲,۳}$ عبور می‌کند، در این صورت داریم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \xrightarrow[R_{eq}=R_{۲,۳}+R_{۴,۵}=۲+۵=۷\Omega]{\varepsilon=۱۲V\ ,\ r=۱\Omega}$$

$$I_۲ = \frac{۱۲}{۷+۱} = ۱/۵A$$

گام چهارم: آمپرسنج در حالت اول جریان $I_۱$ و در حالت دوم جریان $I_۲$ را نشان می‌دهد. پس جریان آمپرسنج $۰/۵A$ کاهش می‌یابد.

$$I_۲ - I_۱ = ۱/۵ - ۲ = -۰/۵A$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۹۵- گزینهٔ «۴» *(علی برزگر)*

از رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$ و با توجه به ثابت بودن مشخصات فیزیکی لامپ می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow[\text{ثابت } R]{P=\frac{V^۲}{R}} \frac{P_۲}{P_۱} = \left(\frac{V_۲}{V_۱}\right)^۲ \xrightarrow[V_۱=۲۲۰V\ ,\ V_۲=۱۱۰V]{P_۱=۲۰۰W}$$

$$\frac{P_۲}{۲۰۰} = \left(\frac{۱۱۰}{۲۲۰}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow P_۲ = ۵۰W$$

توان مصرفی $= \frac{۵}{۱۰۰}kW$

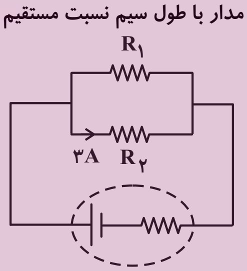
بهای برق مصرفی = (توان مصرفی برحسب کیلووات) × (مدت مصرف برحسب ساعت) × (نرخ واحد)

$= \frac{۵}{۱۰۰} \times (۲\times۳۰\times۶) \times ۷۰۰ = ۱۲۶۰۰$ ریال

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۹۶- گزینهٔ «۲» *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

ابتدا مدار زیر را ساده می‌کنیم. همان‌طور که می‌دانیم طبق رابطهٔ $R = \rho\frac{L}{A}$، مقاومت مدار با طول سیم نسبت مستقیم دارد.



می‌دانیم طول کمان مقابل به زاویهٔ مرکزی برابر با حاصل‌ضرب زاویهٔ مرکزی در شعاع دایره است.

$$L_۱ = \frac{۳\pi}{۲} \times \text{شعاع}$$

$$L_۲ = \frac{\pi}{۲} \times \text{شعاع}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱} = \frac{L_۲}{L_۱} \xrightarrow{L_۱=۳L_۲} \frac{R_۲}{R_۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{R_۲}{R_۱} = \frac{I_۱}{I_۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{I_۱}{۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow I_۱ = ۱A$$

جریان کل مدار برابر است با: $I_t = I_۱ + I_۲ = ۱ + ۳ = ۴A$

توان تولیدی مولد برابر است با: $P = \varepsilon I_t = ۲۰ \times ۴ = ۸۰W$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۹۷- گزینهٔ «۴» *(ملیحه میرصالحی)*

چون $r = ۰$ و ولتاژ دو سر منبع ثابت است. بنابراین طبق رابطهٔ $P = \frac{V^۲}{R}$، $V^۲$ ثابت است و برای این‌که P بیشینه شود، باید R_{eq} به حداقل برسد. بنابراین باید هر سه مقاومت $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ در مدار قرار بگیرند. در این حالت داریم:

$$\frac{۱}{R_{۲,۳,۴}} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱/۵} \Rightarrow R_{۲,۳,۴} = ۰/۷۵\Omega$$

$$R_{eq\,min} = R_۱ + R_{۲,۳,۴} = ۱/۷۵ + ۰/۷۵ = ۲/۵\Omega$$

اکنون، برای توان مصرفی بیشینه با استفاده از رابطهٔ $P=\frac{V^{۲}}{R}$ می‌توان نوشت:

$$P_{max}=\frac{\varepsilon^{۲}}{R_{eq\,min}}\xrightarrow[R_{eq\,min}=۲/۵\Omega]{\varepsilon=۱۰V}$$

$$P_{max}=\frac{۱۰۰}{۲/۵}=۴۰W$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۹۸- گزینهٔ «۴» (میثم دشتیان)

وقتی هر دو کلید باز هستند مقاومت معادل مدار، همان مقاومت $R_{۱}$ است:

$$R_{eq(۱)}=R_{۱}=۹\Omega$$

در حالتی که دو کلید بسته باشند، هر سه مقاومت با هم موازی‌اند. اگر مقاومت معادل در این حالت را $R_{eq(۲)}$ بنامیم، چون در دو حالت توان خروجی باتری یکسان است، می‌توان نوشت:

$$r^{۲}=R_{eq(۱)}\times R_{eq(۲)}\xrightarrow[R_{eq(۱)}=۹\Omega]{r=۶\Omega}$$

$$۶^{۲}=۹\times R_{eq(۲)}\Rightarrow R_{eq(۲)}=۴\Omega$$

اگر مقاومت معادل $R_{۱}$ و $R_{۲}$ را $R_{۱,۲}$ بنامیم، چون با $R_{۳}$ موازی است می‌توان نوشت:

$$R_{eq(۲)}=\frac{R_{۱,۲}\times R_{۳}}{R_{۱,۲}+R_{۳}}\xrightarrow[R_{۳}=۱۲\Omega]{R_{eq(۲)}=۴\Omega}$$

$$۴=\frac{R_{۱,۲}\times ۱۲}{R_{۱,۲}+۱۲}\Rightarrow R_{۱,۲}=۶\Omega$$

$$R_{۱,۲}=\frac{R_{۱}\times R_{۲}}{R_{۱}+R_{۲}}\xrightarrow{R_{۱}=۹\Omega}۶=\frac{۹R_{۲}}{۹+R_{۲}}\Rightarrow R_{۲}=۱۸\Omega$$

اگر فقط کلید $k_{۱}$ بسته باشد، مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq}=R_{۱,۲}=۶\Omega$$

$$I_{t}=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{۵۴}{۶+۶}=۴/۵A$$

اکنون اگر جریان عبوری از $R_{۲}$ را $I_{۲}$ بنامیم:

$$V_{R_{۲}}=V_{R_{۱,۲}}\Rightarrow R_{۲}I_{۲}=R_{۱,۲}I_{۱,۲}$$

$$\xrightarrow{I_{۱,۲}=I_{t}=۴/۵A}۱۸\times I_{۲}=۶\times ۴/۵\Rightarrow I_{۲}=۱/۵A$$

در نهایت توان مصرفی در $R_{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$P=R_{۲}I_{۲}^{۲}=۱۸\times(۱/۵)^{۲}=۴۰/۵W$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۹۹- گزینهٔ «۳» (امیراحمد میرسعید)

با افزایش مقاومت رئوستا، مقاومت کل مدار نیز افزایش می‌یابد و با توجه به رابطهٔ جریان در مدار تک حلقه، جریان کاهش می‌یابد.

$$R\uparrow\Rightarrow I\downarrow=\frac{\varepsilon}{R\uparrow+R_{۲}+r}$$

$$V_{۱}=\varepsilon-Ir\xrightarrow{I\downarrow}V_{۱}\uparrow=\varepsilon-(I\downarrow)r$$

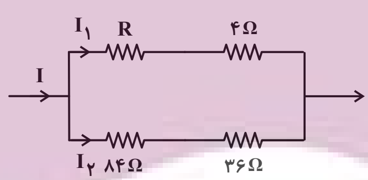
$$V_{۲}=R_{۲}I\xrightarrow{I\downarrow}V_{۲}\downarrow=R_{۲}I\downarrow$$

$$V_{۳}=\varepsilon-I(r+R_{۲})\xrightarrow{I\downarrow}V_{۳}\uparrow=\varepsilon-(I\downarrow)(r+R_{۲})$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۱۰۰- گزینهٔ «۳» (شیلا شیرزادی)

با توجه به این‌که توان مصرفی مقاومت ۴ اهمی و ۳۶ اهمی با هم برابر است پس با استفاده از رابطهٔ $P=RI^{۲}$، نسبت جریان این دو مقاومت را که همان جریان شاخهٔ (۱) و (۲) می‌باشد به‌دست می‌آوریم:



$$P_{۴}=P_{۳۶}\Rightarrow ۴I_{۱}^{۲}=۳۶I_{۲}^{۲}\Rightarrow\frac{I_{۱}^{۲}}{I_{۲}^{۲}}=\frac{۳۶}{۴}=۹\Rightarrow\frac{I_{۱}}{I_{۲}}=۳$$

مقاومت معادل شاخهٔ بالا را با $R_{۱}$ و مقاومت معادل شاخهٔ پایین را با $R_{۲}$ نشان می‌دهیم. چون شاخه‌های (۱) و (۲) با هم موازیند، پس اختلاف پتانسیل آن‌ها برابر است، پس:

$$V_{۱}=V_{۲}\Rightarrow R_{۱}I_{۱}=R_{۲}I_{۲}\xrightarrow[R_{۲}=۸۴+۳۶(\Omega)]{R_{۱}=R+۴(\Omega)}$$

$$(R+۴)I_{۱}=(۸۴+۳۶)I_{۲}\xrightarrow{I_{۱}=۳I_{۲}}(R+۴)(۳I_{۲})=۱۲۰I_{۲}$$

$$R+۴=۴۰\Rightarrow R=۳۶\Omega$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

شیمی ۳

۱۰۱- گزینهٔ «۲» (روزبه رضوانی)

سرعت تولید B دو برابر سرعت تولید A است.

* ابتدا سرعت واکنش رفت زیاد و سرعت واکنش برگشت صفر است، به تدریج سرعت واکنش رفت کاهش و برگشت افزایش می‌یابد تا با هم برابر شوند.

* ویژگی سامانهٔ تعادلی، برابر بودن سرعت واکنش رفت و برگشت است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱۰۲- گزینهٔ «۴» (حسن عیسی‌زاده)

هیدروسیانیک اسید (HCN) یک اسید ضعیف بوده و به شکل تعادلی یونیده می‌شود.

$$HCN(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CN^-(aq)$$

از طرفی با اضافه شدن $NaOH$ بر روی محلول HCN، غلظت یون H^+ به دلیل خنثی شدن، کمتر شده و HCN بیشتر یونیده می‌شود. در نتیجه غلظت CN^- افزایش و غلظت HCN یونیده نشده کمتر می‌شود. یعنی درصد یونش HCN افزایش می‌یابد؛ بنابراین فقط مورد (ب) درست است. درضمن مقدار K_a تنها با تغییر دما تغییر می‌کند.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳ و ۲۸ تا ۳۲)

۱۰۳- گزینهٔ «۴» (رضا سلیمانی)

در ابتدا غلظت ppm را به مولاریته تبدیل می‌کنیم:

$$ppm = \frac{۳۶۰g\ \text{اسید}}{۱۰^{۶}\ g\ \text{محلول}}$$

$$\text{مولاریته} = \frac{۳۶۰\times\frac{۱}{۶۰}}{\frac{۱۰^{۶}}{۱۲۰۰}L^{-۱}} = ۷۲\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}$$

$$\begin{array}{lccc} CH_۳COOH & \rightleftharpoons & CH_۳COO^- & + H_۳O^+ \\ ۷۲\times۱۰^{-۴} & & ۰ & ۰ \\ -x & & +x & +x \\ \hline ۷۲\times۱۰^{-۴}-x & & +x & +x \end{array}$$

$$K_a = \frac{x^۲}{۷۲\times۱۰^{-۴}-x} = ۵\times۱۰^{-۵}$$

با توجه به K_a بسیار کوچک از تغییرات x صرف‌نظر می‌کنیم.

$$K_a = \frac{x^۲}{۷۲\times۱۰^{-۴}} = ۵\times۱۰^{-۵}$$

$$x^۲ = ۳۶\times۱۰^{-۸} \Rightarrow x = ۶\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱} = [H^+]$$

$$\text{مول} = ۶\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}\times۰/۲ = ۱/۲\times۱۰^{-۴}\,mol\ H^+$$

$$pH = -\log[H_۳O^+] = -\log ۶\times۱۰^{-۴} = ۴-\log ۶ = ۳/۲$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۵)

۱۰۴- گزینهٔ «۲» (رضا مسکن)

$pH = ۰/۷ \qquad [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۰/۷} = ۰/۲\,mol.L^{-۱}$

$pH = ۱/۴ \qquad [H^+] = ۱۰^{-۱/۴} = ۰/۰۴\,mol.L^{-۱}$

$[H^+]_{\text{مصرفی}} = ۰/۲ - ۰/۰۴ = ۰/۱۶$

طبق واکنش چون ضریب $ZnCl_۲$ نصف HCl است پس غلظت $Zn^{۲+}$ برابر $۰/۰۸\,mol.L^{-۱}$ است.

$$[Zn^{۲+}] = ۰/۰۸\,mol.L^{-۱}$$

یون Cl^- در این واکنش دست‌نخورده باقی مانده است.

$$HCl: [H^+]_{\text{اولیه}} = [Cl^-] = ۰/۲\,mol.L^{-۱}$$

$$\frac{[Zn^{۲+}]}{[Cl^-]} = \frac{۰/۰۸}{۰/۲} = ۰/۴$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۰۵- گزینهٔ «۳» (امیرعلی آقاسی‌زاده)

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱/۲} \Rightarrow [H^+] \simeq ۶\times۱۰^{-۲}\frac{mol}{L}$$

$$۶\times۱۰^{-۲}\frac{mol}{L}\times۰/۵L\times\frac{۱mol\ Mg}{۲mol\ HCl}\times\frac{۱s}{۵\times۱۰^{-۵}mol\ Mg}\times\frac{۱min}{۶۰s} = ۵\,min$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲)

۱۰۶- گزینهٔ «۲» (امیرمحمد سعیدی)

pH هر دو محلول را محاسبه می‌کنیم. (توجه شود $۲۹۸K$ همان $۲۵^\circ C$ است.)

$$T = \theta + ۲۷۳ \Rightarrow ۲۹۸ = \theta + ۲۷۳ \Rightarrow \theta = ۲۵^\circ C$$

$$Mg(OH)_۲\begin{cases}[OH^-] = Mn\alpha = ۴\times۱۰^{-۳}\times۲\times۱ = ۸\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}\\ pOH = -\log[OH^-] = -\log(۸\times۱۰^{-۳}) = ۳-\log ۸\\ = ۳-\log ۲^۳ = ۳-۳(\log ۲) = ۳-(۳\times۰/۳) = ۲/۱\\ pH + pOH = ۱۴ \Rightarrow pH + ۲/۱ = ۱۴ \Rightarrow pH = ۱۱/۹\end{cases}$$

$$HA\begin{cases}\alpha = ۱/۵\times۱۰^{-۲} = \frac{۳}{۲}\times۱۰^{-۲}\\ [H^+] = Mn\alpha = ۲\times۱۰^{-۲}\times۱\times\frac{۳}{۲}\times۱۰^{-۲}\\ = ۳\times۱۰^{-۴}\,mol.L^{-۱}\\ pH = -\log[H^+] = -\log(۳\times۱۰^{-۴}) = ۴-\log ۳ = ۴-۰/۵ = ۳/۵\end{cases}$$

اختلاف pH دو محلول $= 11/9 - 3/5 = 8/4$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۰۷- گزینهٔ «۲» (هانی سوری)

فقط مورد دوم درست است.

بررسی موارد:

مورد اول: همهٔ بازها خورنده نیستند. بازهای قوی خورنده هستند.

مورد دوم: هر چه در شرایط یکسان pH محلول یک باز بیشتر باشد آن باز قوی‌تر است.

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH}$$

$$\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2} = \frac{10^{-pH_1}}{10^{-pH_2}} = \frac{10^{-13/4}}{10^{-10/7}} = 10^{-2/7}$$

$$[H^+]_1 = 10^{-2/7}[H^+]_2 = 10^{-3} \times 2[H^+]_2$$

نسبت غلظت هیدرونیوم‌های ۲ محلول عکس نسبت غلظت هیدروکسیدهای آن‌ها می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2} = \frac{[OH^-]_2}{[OH^-]_1} \Rightarrow \frac{[OH^{-1}]_1}{[OH^-]_2} = \frac{1000}{2} = 500$$

مورد سوم و چهارم: pH محلول‌ها به قدرت آن‌ها بستگی ندارد بلکه به غلظت $[H^+]$ آن‌ها بستگی دارد.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۱۰۸- گزینهٔ «۱» (امیرحسین طیبی)

بررسی همهٔ موارد:

الف) درست

$$[OH^-] = \frac{\text{ذره } 2 \times \frac{2\times10^{-4}\,mol}{\text{ذره } 1}}{0/8\ L\ \text{محلول}} = 5\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow pOH = 4 - \log 5 = 4 - 0/7 = 3/3$$

$$\Rightarrow pH = 14 - 3/3 = 10/7$$

ب) نادرست؛ با توجه به شکل درمی‌یابیم که در ابتدا ۱۰ ذرهٔ NH_3 وجود داشته که ۲ ذرهٔ آن یونیده شده است.

$$\%\alpha = \frac{2}{10}\times100 = 20\%$$

پ) نادرست؛ لوله بازکن محلول NaOH در آب است.

ت) درست

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{[NH_3]} = \frac{5\times10^{-4}\times5\times10^{-4}}{2\times10^{-3}} = 1/25\times10^{-4}\,mol.L^{-1}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰)

۱۰۹- گزینهٔ «۲» (هانی سوری)

محلول HA طبق $[HA] = M.V$ شامل ۲ مول HA است.

حجم محلول نهایی ۲ لیتر خواهد بود.

طبق $\alpha = \frac{[H^+]}{M}$ مقدار $[H^+]$ در محلول HA برابر است با:

$$[H^+] = M.\alpha$$

مقدار مول H^+ محلول نهایی برابر است با: $(M.\alpha) + 0/1$

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow 0/3 = -\log[H^+]$$

$$[H^+] = 10^{-0/3} = 10^{-1}\times10^{0/7} = 0/5$$

$$[H^+].V = H^+ \text{ تعداد مول } \Rightarrow 0/5\times2 = H^+ \text{ یک مول}$$

$$\Rightarrow 1 = M.\alpha + 0/1 \Rightarrow 2\times\alpha = 0/9 \Rightarrow \alpha = 0/45$$

$$\Rightarrow \text{درصد یونش} = 45\%$$

$$NaOH + HA \rightarrow NaA + H_2O$$

$$2\,mol\ HA \times \frac{1\,mol\ NaOH}{1\,mol\ HA} \times \frac{40\,g\ NaOH}{1\,mol\ NaOH} = 80\,g\ NaOH$$

$$NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$$

$$0/1\,mol\ HCl \times \frac{1\,mol\ NaOH}{1\,mol\ HCl} \times \frac{40\,g\ NaOH}{1\,mol\ NaOH} = 4\,g\ NaOH$$

پس $80 + 4 = 84$ گرم NaOH نیاز است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۴ تا ۳۲)

۱۱۰- گزینهٔ «۲» (محمد عظیمیان‌زواره)

بررسی موارد:

آ) درست

$$Li_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2\underbrace{(Li^+(aq) + OH^-(aq))}_{\text{باز قوی}}$$

ب) نادرست؛ در بدن انسان بالغ روزانه بین دو تا سه لیتر شیرهٔ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم آن حدود $0/03\,mol.L^{-1}$ می‌باشد.

پ) درست؛ در شیشه‌پاک‌کن آمونیاک و در لوله بازکن سدیم هیدروکسید وجود دارد.

ت) نادرست

$$M = \frac{0/02\,mol}{0/1\,L} = 0/2$$

$$[H_3O^+] = M = 2\times10^{-1} \Rightarrow pH = 0/7$$

ث) درست

(شیمی ۳- مولکول‌ها در خدمت تندرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۳۱)

شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(حمید ذبحی)*

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: نادرست؛ با این‌که با افزایش ارتفاع، فشار کاهش می‌یابد اما شیب تغییرات آن ثابت نیست.

عبارت دوم: درست؛ با افزایش ارتفاع، غلظت گازها در هواکره کاهش می‌یابد اما درصد حجمی آن‌ها ثابت است.

عبارت سوم: درست؛ در لایه‌های اول و سوم هواکره، با افزایش ارتفاع، دما کاهش می‌یابد.

عبارت چهارم: نادرست؛ در ارتفاعات بسیار بالا، گونه‌های خنثی و مثبت یافت می‌شود.

عبارت پنجم: نادرست؛ حدود ۷۵ درصد جرم هواکره را تروپوسفر تشکیل می‌دهد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

۱۱۲- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

تنها مورد نادرست، مورد سوم است. نام N_2O دی‌نیتروژن مونواکسید است که در نوشتن آن از دو پیشوند استفاده می‌شود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۵)

۱۱۳- **گزینهٔ «۳»** *(روزبه رضوانی)*

عبارت‌های «ب»، «پ» و «ت» می‌توانند جمله را به درستی تکمیل کنند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) $Li_2S \Rightarrow \frac{\text{کاتیون}}{\text{آنیون}} = \frac{2}{1}$ ، $Fe_2O_3 \Rightarrow \frac{\text{آنیون}}{\text{کاتیون}} = \frac{3}{2}$

ب) $MgBr_2 \Rightarrow \frac{\text{کاتیون}}{\text{آنیون}} = \frac{1}{2}$ ، $Cu_2O \Rightarrow \frac{\text{آنیون}}{\text{کاتیون}} = \frac{1}{2}$

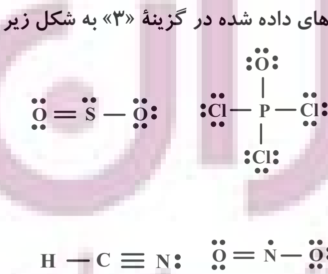
پ) $CuCl \Rightarrow \frac{\text{کاتیون}}{\text{آنیون}} = \frac{1}{1}$ ، $BaS \Rightarrow \frac{\text{آنیون}}{\text{کاتیون}} = \frac{1}{1}$

ت) $Na_3N \Rightarrow \frac{\text{کاتیون}}{\text{آنیون}} = \frac{3}{1}$ ، $CrF_3 \Rightarrow \frac{\text{آنیون}}{\text{کاتیون}} = \frac{3}{1}$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۱۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

ساختار لوویس گونه‌های داده شده در گزینهٔ «۳» به شکل زیر است:



بنابراین تعداد جفت الکترون‌های پیوندی در $POCl_3$ و HCN با هم برابر بوده و SO_2 و NO_2 نیز تعداد پیوندهای اشتراکی یکسانی دارند. توجه داشته باشید که NO_2 دارای یک الکترون ناپیوندی تنها است و روی اتم‌های اکسیژن دارای جفت الکترون ناپیوندی است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۱۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدرحیم هاشمی‌دهکردی)*

بررسی موارد نادرست:

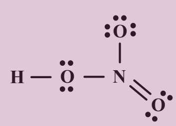
مورد دوم: کاتیون Cr^{3+} در ترکیب $CrCl_3$ با اکسیژن، اکسیدی با فرمول Cr_2O_3 تشکیل می‌دهد.

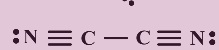
مورد سوم: PCl_3 را فسفر تری‌کلرید و N_2O_3 را دی‌نیتروژن تری‌اکسید می‌نامند.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

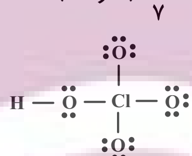
۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(نورا نوروزی)*

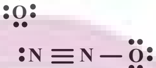
بررسی موارد:

الف) HNO_3 :  تعداد الکترون ناپیوندی = ۱۴

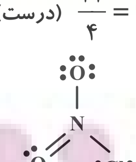
C_2N_2 :  تعداد جفت الکترون پیوندی = ۷ جفت

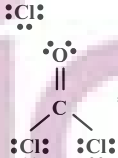
نسبت مدنظر $= \frac{14}{7} = 2$ (نادرست)

ب) $HClO_4$:  تعداد الکترون ناپیوندی = ۲۲

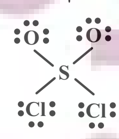
N_2O :  تعداد جفت الکترون پیوندی = ۴ جفت

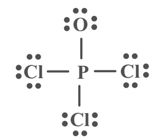
نسبت مدنظر $= \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$ (درست)

پ) NO_2Cl :  تعداد الکترون ناپیوندی = ۱۶

$COCl_2$:  تعداد جفت الکترون پیوندی: ۴

نسبت مد نظر $= \frac{16}{4} = 4$ (نادرست)

ت) SO_2Cl_2 :  تعداد الکترون ناپیوندی = ۲۴

$POCl_3$:  تعداد جفت الکترون پیوندی = ۴

نسبت مد نظر $= \frac{۲۴}{۴} = ۶$ (درست)

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی: صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۱۱۷- **گزینهٔ «۴»** (امیر حاتمیان)

شکل درست گزینهٔ «۴»:

میل ترکیبی هموگلوبین با کربن مونوکسید بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی: صفحه‌های ۵۲، ۵۷ و ۵۸)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا پورجاوید)

واکنش‌های موازنه شده عبارتند از:

۱) $C_5H_8O_2 + 2NaH + 2HCl \rightarrow C_5H_{12}O_2 + 2NaCl$

۲) $K_2Cr_2O_7 + 6FeCl_2 + 14HCl$

$\rightarrow 2CrCl_3 + 6FeCl_3 + 2KCl + 7H_2O$

۳) $4KMnO_4 + 6H_2SO_4$

$\rightarrow 2K_2SO_4 + 4MnSO_4 + 6H_2O + 5O_2$

۴) $3Cu + 8HNO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O$

با توجه به این‌که نسبت مجموع ضرایب مولی واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها در آن‌ها به ترتیب برابر با $\frac{۵}{۳}$ ، $\frac{۲۱}{۱۷}$ ، $\frac{۱۰}{۱۷}$ و $\frac{۱۱}{۹}$ است، این نسبت در واکنش اول بیشتر از بقیه خواهد بود.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۱۹- **گزینهٔ «۳»** (نازنین صدیقی)

واکنش‌های مورد نظر به شکل زیر، موازنه می‌شوند:

I) $2KNO_2 + KNO_3 + Cr_2O_3 \rightarrow 4NO + 2K_2CrO_4$

II) $2KMnO_4 + 5PCl_3 + 16HCl$

$\rightarrow 2KCl + 2MnCl_2 + 5PCl_5 + 8H_2O$

III) $3As_2S_3 + 28HNO_3 + 4H_2O$

$\rightarrow 6H_3AsO_4 + 9H_2SO_4 + 28NO$

IV) $K_2Cr_2O_7 + 3H_2SO_4 + 4KCl$

$\rightarrow 2CrO_2Cl_2 + 3K_2SO_4 + 3H_2O$

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نادرست

مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (III) : ۳۵

مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها در واکنش (IV) : ۸

مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (III) : ۴۳

مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (IV) : ۸

نسبت مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها:

در واکنش III : $\frac{۳۵}{۴۳}$ در واکنش IV : $\frac{۸}{۸} = ۱$

این نسبت در واکنش (III)، کمتر از ۱ می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: نادرست؛ مواد دارای عنصر فلزی در واکنش (II) :

$2KMnO_4$, $2KCl$, $2MnCl_2$

$\Leftarrow$ مجموع ضرایب = ۶

مواد دارای عنصر فلزی در واکنش (I) :

$3KNO_2$, KNO_3 , Cr_2O_3 , $2K_2CrO_4$

$\Leftarrow$ مجموع ضرایب = ۷

این عدد در واکنش (I) از (II)، بیشتر است.

گزینهٔ «۳»: درست؛ مجموع ضرایب کل مواد در واکنش (II)، ۴۰ بوده و مجموع ضرایب فراورده‌ها در واکنش (III) ، ۴۳ می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: نادرست؛ واکنش‌دهنده‌های واجد پتاسیم در واکنش (I) :

$3KNO_2$, KNO_3

و در واکنش (IV) : $4KCl$, $K_2Cr_2O_7$

مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌های موردنظر در واکنش (I) ، ۴ و در واکنش (IV) برابر ۵ می‌باشد.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** (روزبه رضوانی)

بررسی گزینه‌ها:

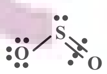
گزینهٔ «۱»: $:N \equiv N:$ و $:C \equiv O:$

گزینهٔ «۲»:

$4C_3H_5N_3O_9 \rightarrow 12CO_2 + 10H_2O + 6N_2 + O_2$

گزینهٔ «۳»: با افزایش کربن دی‌اکسید در آب و اسیدی شدن محیط، مرجان‌ها و گروهی از کیسه‌تنان که دارای اسکلت آهکی هستند از بین می‌روند.

گزینهٔ «۴»: نسبت شمار کاتیون به آنیون در Fe_2O_3 برابر با $\frac{۲}{۳}$ و نسبت شمار جفت الکترون اشتراکی به ناپیوندی در SO_2 برابر $\frac{۳}{۶}$ است.



(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶، ۵۹ و ۶۲ تا ۶۴)

شیمی ۲

۱۲۱- گزینهٔ «۳» (پیمان خواجوی‌مجد)

عبارت‌های اول، دوم و چهارم صحیح است.

* ظرفیت گرمایی به جرم بستگی دارد، پس ظرفیت گرمایی آب در ظرف B بیشتر از ظرف A است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۱۲۲- گزینهٔ «۱» (کارو محمدی)

فقط عبارت دوم نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اگر طی فرایند $B \to C$ هر دو تغییرات دما و محتوای انرژی شیمیایی رخ دهد، با توجه به نمودار حالت C پایین‌تر و پایداری آن بالاتر خواهد بود.

عبارت دوم: پس از خوردن بستنی، فرایند هم‌دما شدن آن با بدن رخ می‌دهد $(A \to B)$ سپس فرایند آزاد شدن انرژی پتانسیل شیمیایی آن صورت می‌گیرد $(B \to C)$. دقت کنید تغییرات انرژی هم‌دما شدن بستنی با بدن، بسیار کمتر از فرایند تبدیل آن به فراورده‌های دیگر و آزاد شدن انرژی شیمیایی آن است. بنابراین تفاوت سطح انرژی A با C، بسیار بیشتر از A با B خواهد بود.

عبارت سوم: با توجه به بالاتر بودن A از C، علامت $\Delta\theta$ در فرایند $C \to A$ مثبت خواهد بود.

عبارت چهارم: محتوای انرژی هیدرازین، از عناصر سازندهٔ خود (نیتروژن و هیدروژن) بیشتر است و محتوای انرژی آمونیاک از N_2 و H_2 کمتر است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۸، ۵۹ و ۶۳ تا ۶۵ و ۷۲ تا ۷۵)

۱۲۳- گزینهٔ «۱» (علی افخمی‌نیا)

در ابتدای آغاز فرایند، واکنش دوم آغاز نمی‌شود، بعد از گذشت مدتی با تولید اکسیژن توسط واکنش اول، واکنش دوم شروع می‌شود. به خاطر اتمام اکسیژن در سامانه متوجه می‌شویم که مقدار O_2 تولیدی از واکنش اول تماماً در واکنش دوم مصرف شده است. فرض کنیم x مول O_2 از واکنش اول تولید شده باشد، در این صورت x مول O_2 در واکنش ۲ مصرف شده است. مجموع گرمای آزاد شده برابر است با جمع گرمای آزاد شده تک‌تک واکنش‌ها.

واکنش اول:
$$x\,mol\,O_۲ \times \frac{۱۹۶\,kJ}{۱\,mol\,O_۲} = ۱۹۶\,x\,kJ$$

واکنش دوم:
$$x\,mol\,O_۲ \times \frac{۲۸۶\,kJ}{\frac{۱}{۲}\,mol\,O_۲} = ۵۷۲\,x\,kJ$$

مجموع گرمای آزاد شده:
$$۱۹۶\,x + ۵۷۲\,x = ۴۶۰/۸ \Rightarrow ۷۶۸\,x\,kJ = ۴۶۰/۸\,kJ \Rightarrow x = ۰/۶$$

مجموع آب تولید شده = آب تولیدی واکنش اول + آب تولید شده واکنش دوم:

واکنش اول:
$$x\,mol\,O_۲ \times \frac{۲\,mol\,H_۲O}{۱\,mol\,O_۲} \times \frac{۱۸\,g\,H_۲O}{۱\,mol\,H_۲O} = ۳۶x\,g\,H_۲O \xrightarrow{x=۰/۶} ۲۱/۶\,g\,H_۲O$$

واکنش دوم:
$$x\,mol\,O_۲ \times \frac{۱\,mol\,H_۲O}{\frac{۱}{۲}\,mol\,O_۲} \times \frac{۱۸\,g\,H_۲O}{۱\,mol\,H_۲O} = ۳۶x\,g\,H_۲O \xrightarrow{x=۰/۶} ۲۱/۶\,g\,H_۲O$$

آب کل $\Rightarrow ۲۱/۶ + ۲۱/۶ = ۴۳/۲\,g\,H_۲O$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۱۲۴- گزینهٔ «۳» (محمدرضا پورجاوید)

گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای محلول آبی داده شده برابر است با:

$$Q = mc\Delta\theta = ۱۸۸\,g \times ۴/۰\,\frac{J}{g.^\circ C} \times ۲۵^\circ C = ۱۸۸۰۰\,J$$

از طرفی گرمای واکنش تجزیهٔ هیدرازین نیز عبارت است از:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی پیوند}\\ \text{واکنش‌دهنده‌ها}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی پیوند}\\ \text{فراورده‌ها}\end{array}\right]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \Delta H_{(N-N)} + ۴\Delta H_{(N-H)} - \Delta H_{(N\equiv N)} - ۲\Delta H_{(H-H)}$$
$$= ۱۵۹ + ۴(۳۹۱) - ۹۴۵ - ۲(۴۳۶) = -۹۴\,kJ = -۹۴۰۰۰\,J$$

بنابراین جرم هیدرازین مورد نیاز برای فراهم کردن ۱۸۸۰۰ ژول گرمای مورد نیاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۱۸۸۰۰\,J \times \frac{۱\,mol\;N_۲H_۴}{۹۴۰۰۰\,J} \times \frac{۳۲\,g\;N_۲H_۴}{۱\,mol\;N_۲H_۴} = ۶/۴\,g\;N_۲H_۴$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۷، ۵۸ و ۶۵ تا ۶۸)

۱۲۵- گزینهٔ «۴» (محمد عظیمیان‌زواره)

ترکیب‌های (I)، (II) و (III) به ترتیب در بادام، گشنیز و دارچین یافت می‌شوند.

بررسی گزینهٔ «۲»: در نفتالن نیز ۵ پیوند دوگانه وجود دارد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۲۶- گزینهٔ «۲» (علی رفیعی)

به ترکیب‌هایی که دارای فرمول مولکولی یکسان اما دارای ساختار متفاوت هستند، ایزومر (همپار) گفته می‌شود.

فرمول مولکولی ترکیب‌ها:

آ) $C_{۱۰}H_{۱۸}O$ ب) $C_۹H_{۱۶}O$

پ) $C_۹H_{۱۸}O$ ت) $C_{۱۰}H_{۱۸}O$

ث) $C_{۱۰}H_{۱۶}O$

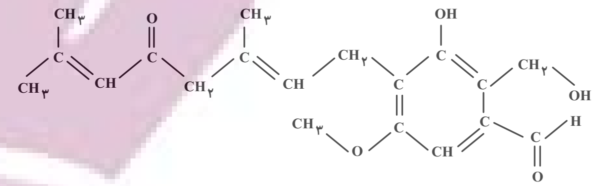
ترکیبات (آ) و (ت) با یکدیگر ایزومر هستند.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحهٔ ۷۰)

۱۲۷- گزینهٔ «۳» (محمدرضا پورجاوید)

ترکیب داده شده با ساختار زیر دارای یک گروه عاملی کتونی، یک گروه عاملی اتری، دو گروه عاملی هیدروکسیل و یک گروه عاملی آلدهیدی است.

از طرفی دارچین دارای گروه عاملی آلدهیدی است که در این ترکیب وجود دارد.



(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۱۲۸- **گزینهٔ «۴»** (محمد عظیمیان‌زواره)

$$۲C_۲H_۲(g)+۵O_۲(g)\rightarrow ۴CO_۲(g)+۲H_۲O(g)+۲۶۰۰kJ$$

بنابراین آنتالپی سوختن اتین برابر $-۱۳۰۰kJ.mol^{-۱}$ می‌باشد.

$$\text{ارزش سوختی}=\frac{|\Delta H|}{\text{جرم مولی}}=\frac{۱۳۰۰}{۲۶}=۵۰kJ.g^{-۱}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) درست

$$c=\frac{Q}{m\Delta\theta}=\frac{۶۴}{۲۰\times۲۵}\Rightarrow c=۰/۱۲۸J.g^{-۱}.{}^{\circ}C^{-۱}<۰/۲$$

۲) درست؛ گروه عاملی الکلی، گروه $-OH$ می‌باشد. این ترکیب به دلیل داشتن پیوند دوگانه کربن- کربن با برم مایع واکنش داده و رنگ قرمز آن را از بین می‌برد.

۳) درست

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۵۷، ۵۸، ۶۸ تا ۷۱)

۱۲۹- **گزینهٔ «۳»** (روح‌اله علیزاده)

در واکنش مورد نظر $N_۲(g)$ با ضریب یک در سمت فراورده‌ها قرار دارد بنابراین واکنش اول را باید در $\frac{۱}{۴}$ ضرب کنیم:

$$\frac{۱}{۲}NH_۳(g)+\frac{۳}{۴}N_۲O(g)\rightarrow N_۲(g)+\frac{۳}{۴}H_۲O(l)$$

$$\Delta H=\frac{۱}{۴}\times(-۱۰۱۰)=\frac{-۱۰۱۰}{۴}KJ$$

در واکنش بالا $\frac{۱}{۲}NH_۳$ در بین واکنش‌دهنده‌ها داریم در حالی‌که در واکنش اصلی $NH_۳$ نداریم. بنابراین واکنش دوم را عکس نموده و در $\frac{۱}{۴}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۴}N_۲H_۴(l)+\frac{۱}{۴}H_۲O(l)\rightarrow\frac{۱}{۲}NH_۳(g)+\frac{۱}{۸}O_۲(g)$$

$$\Delta H=-\times(-۱۴۳)\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱۴۳}{۴}KJ$$

تا اینجا اگر این دو واکنش را جمع کنیم $\frac{۳}{۴}N_۲O$ در سمت واکنش‌دهنده خواهیم داشت در حالی‌که در واکنش اصلی $N_۲O$ نداریم بنابراین واکنش سوم را وارون کرده و در $\frac{۳}{۴}$ ضرب می‌نماییم:

$$\frac{۳}{۴}N_۲H_۴(l)+\frac{۳}{۴}H_۲O(l)\rightarrow\frac{۳}{۴}N_۲O(g)+\frac{۹}{۴}H_۲(g)$$

$$\Delta H=-\frac{۳}{۴}\times(-۳۱۷)KJ$$

در واکنش سوم $\frac{۹}{۴}H_۲$ داریم در حالی‌که واکنش اصلی $H_۲$ ندارد بنابراین کافی است واکنش چهارم را در $\frac{۹}{۴}$ ضرب کنیم:

$$\frac{۹}{۴}H_۲(g)+\frac{۹}{۸}O_۲(g)\rightarrow\frac{۹}{۴}H_۲O(l)$$

$$\Delta H=\frac{۹}{۴}\times(-۲۸۶)KJ$$

بنابراین:

$$\Delta H=(-\frac{۱۰۱۰}{۴})+(+\frac{۱۴۳}{۴})+(\frac{۳\times۳۱۷}{۴})+(\frac{۹\times-۲۸۶}{۴})=-۶۲۲/۵KJ$$

حال گرمای آزاد شده به ازای تولید ۳/۶ گرم آب را به دست می‌آوریم:

$$?kJ=۳/۶g\ H_۲O\times\frac{۱mol\ H_۲O}{۱۸g\ H_۲O}\times\frac{-۶۲۲/۵kJ}{۲mol\ H_۲O}$$

$$=-۶۲/۲۵kJ$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۵)

۱۳۰- **گزینهٔ «۱»** (کارو محمدی)

اجزای واکنش (II) را در ۲ ضرب کرده، (III) را معکوس می‌کنیم واکنش (I) را بدون تغییر باقی می‌گذاریم. با جمع کردن این واکنش‌ها می‌توان به واکنش مورد نظر سؤال رسید.

$$A(g)+۴D(g)\rightarrow ۳B(g)+۴E(g)$$

$$\Delta H=\Delta H_۱+۲\Delta H_۲-\Delta H_۳=۵۴۲+۲(-۹۸)-۸۹۱$$

$$=-۵۴۵kJ$$

با توجه به علامت ΔH به دست آمده، می‌توان گفت که واکنش گرماده بوده و لذا در آن انرژی آزاد می‌شود (رد گزینه‌های «۲» و «۳»)

در این واکنش، به ازای تولید $۳mol\ B(g)+۴mol\ E(g)=۷mol\ (g)$، به اندازهٔ ۵۴۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.

$$?mol\ \text{گاز}=۴۳/۶kJ\times\frac{۷mol\ \text{گاز}}{۵۴۵kJ}=۰/۵۶mol\ \text{گاز}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۲ تا ۷۵)